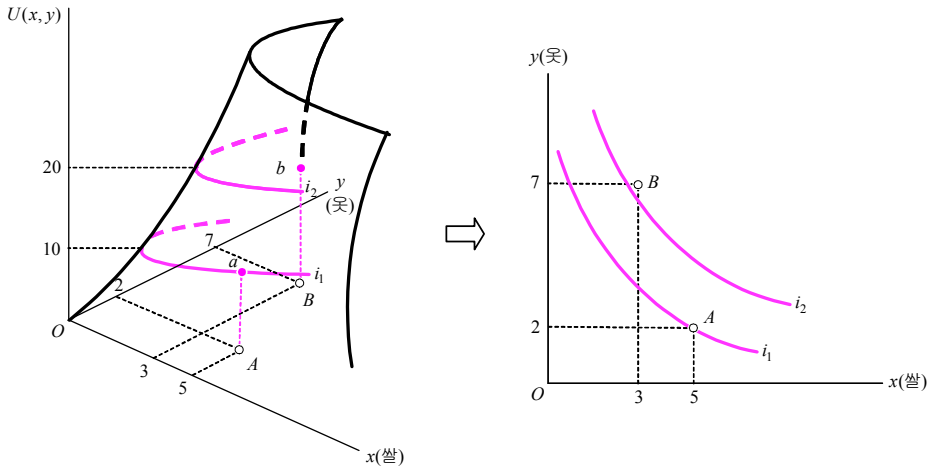
Topic 3-1 다변수함수의 미분

1. 다변수 함수의 예

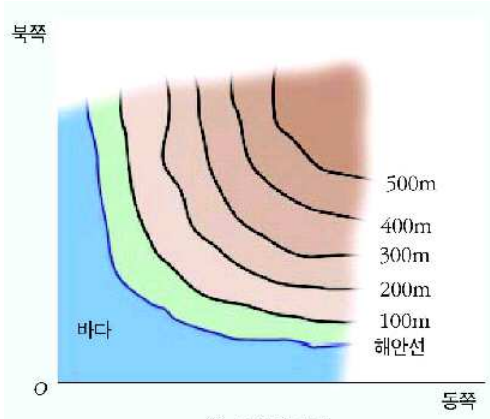
가. 수식

– $z = f(x, y)$ or $U = U(X, Y)$

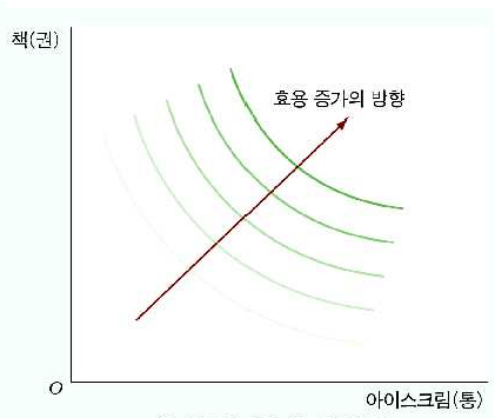
나. 그래프



다. 지도와 등고선



(i) 현실의 지도와 등고선



(ii) 선호를 나타내는 무차별지도와 무차별곡선

2. 편미분(partial derivatives)

가. 정의

- 다른 모든 변수는 일정하고(상수로 간주), 한 변수만 변할 수 있다고 간주할 때의 미분

나. 표기법

- x로 편미분 한 경우 : $f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 1)
- y로 편미분 한 경우 : $f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

다. 유용성

- 편미분은 한계효용, 한계생산 등의 개념과 일치한다.
  1. 다른 재화의 소비는 일정할 때 한 재화의 소비량의 증가는 효용을 얼마나 증가시키는가?
  2. 다른 요소의 투입이 일정할 때 한 요소의 투입량의 증가는 생산량을 얼마나 증가시키는가?
- 편미분은 다른 경기자의 선택이 주어져 있을 때 자신의 최적선택을 결정하는 내쉬전략을 찾는데 유용하게 쓰인다.

3. 전미분(total differential)

가. 정의

- 모든 변수가 변화 가능할 때의 미분

나. 전미분의 공식

- $dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$

다. 유용성

- 무차별곡선의 기울기(MRS_{XY}), 등량선의 기울기($MRTS_{LK}$) 등을 구할 때 사용된다.
- 변수의 곱 또는 몫에 대한 '백분율의 간단공식'을 구할 때 사용된다.

---

1) ∂는 round 또는 partial이라고 읽는다.

Topic 3-2 다변수함수 미분의 응용 : 백분율(%)의 간단공식

1. 분석의 기초[2)]

백분율 변화와 관련된 두 가지 산술 요령

경제학의 많은 관계를 규명하는 데 알아둘 필요가 있는 산술 요령 중 하나는 두 변수의 곱의 백분율 변화는 각 변수의 백분율 변화의 합과 거의 같다는 것이다.

이 요령을 이해하기 위해 한 예를 들어보면 다음과 같다. P 를 GDP 디플레이터, Y 를 GDP라 하면 $P \times Y$ 는 명목 GDP가 된다. 상기의 요령을 이용하면 다음과 같다.

> ($P \times Y$ 의 백분율 변화) ≈
> (P 의 백분율 변화) + (Y 의 백분율 변화)

예를 들어 실질 GDP가 100, GDP 디플레이터는 2이고 다음 해 실질 GDP가 103, GDP 디플레이터가 2.1인 경우를 가상해 보자. 이 경우 실질 GDP는 3퍼센트, GDP 디플레이터는 5퍼센트 증가하였음을 알 수 있다. 첫 해의 명목 GDP가 200이고 둘째 해는 216.3으로 증가한 경우 8.15퍼센트의 증가율을 계산해 낼 수 있다. 명목 GDP의 증가율(8.15퍼센트)은 GDP 디플레이터의 증가율(5퍼센트)과 실질 GDP 증가율(3퍼센트)의 합과 거의 같음을 알 수 있으며 이는 상기의 산술요령과 일치한다.[1)]

두 번째 산술요령은 첫 번째 요령으로부터 추론할 수 있다. 즉 비율의 백분율 변화는 분자의 백분율 변화에서 분모의 백분율 변화를 감한 것과 거의 같다. 한 예로 Y 를 GDP라 하고 L 을 인구라 할 때 Y/L 은 1인당 GDP가 된다. 두 번째 산술 요령을 이용하면 다음과 같다.

> (Y/L 의 백분율 변화) ≈
> (Y 의 백분율 변화) − (L 의 백분율 변화)

예를 들어 첫 해의 Y 는 100,000, L 은 100인 경우 Y/L 은 1,000이 되며 둘째 해의 Y 는 110,000, L 은 103인 경우 Y/L 은 1,068이 된다. 이 경우 1인당 GDP의 증가율(6.8퍼센트)은 소득 증가율(10퍼센트)에서 인구 증가율(3퍼센트)을 감한 값과 거의 같다.

2. 간단공식의 도출

2) 이 자료는 맨큐 저 거시경제학 7판에서 인용하였다.

3. 예제-1 : 수량방정식의 응용

- 외부충격으로 어느 나라의 통화량은 8% 감소하고 화폐의 유통속도는 2% 증가하였다고 한다. 또한, 이 충격으로 실질 GDP가 5% 감소하였다고 한다. 이 경우, 이 나라의 물가수준은?

수량방정식 : $MV = PY$

4. 예제-2 : 총수입의 변화예측

- 농산물에 대한 수요의 가격탄력성이 0.3으로 주어진 경우, 농업 생산량이 2% 증가한다면, 가격은 어떻게 반응할 것인가? 이때 농부들의 소득은 어떻게 변화할까?

총수입의 정의 : $TR = P \times Q$

5. 예제-3 : 성장회계방정식

- 한 국가의 성장률이 9%이고 자본소득분배율과 노동소득분배율이 각각 0.3과 0.7이라고 하자. 이때 자본이 10% 노동이 5%증가했다고 할 때 생산성의 증가율은?

Cobb-Douglas 생산함수 : $Y = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$

$$dY = L^{\alpha}K^{1-\alpha}dA + \alpha AL^{\alpha-1}K^{1-\alpha}dL + (1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha}dK$$

양변을 $Y = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$로 나누면

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dA}{A} + \alpha\frac{dL}{L} + (1-\alpha)\frac{dK}{K}$$

성장회계방정식 : $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta L}{L} + (1-\alpha)\frac{\Delta K}{K}$[3]

3) 이 식은 성장성장의 원동력이 된 원인이 무엇인지를 분석하여 설명하고 있기 때문에 성장회계방정식이라 한다. 이 식에서 A는 총요소생산성(total factor productivity : TFP)을 의미하는데 이는 기술수준의 측정값으로서 경제전체적인 생산기술의 수준을 의미한다.

Topic 3-3 다변수함수 미분의 응용 : 정부지출 승수의 도출

1. 단순한 폐쇄경제모형

단순한 폐쇄경제모형에서 국민소득 결정식(재화시장 균형식)은 다음과 같다

국민소득 결정식-1 : $Y = C(Y - T) + I + G$

재화시장의 균형식을 구성하는 각 요인이 다음과 같이 결정된다고 하자.

1) 소비함수 : $C = \overline{C} + c(Y - T)$ $\overline{C}$는 독립소비, c는 한계소비성향$(= \Delta C / \Delta Y)$
2) 투자함수 : $I = \overline{I}$
3) 정부구매 : $G = \overline{G}$
4) 조세 : $T = \overline{T}$

이상의 식을 정리하면 다음과 같다.

국민소득 결정식-2 : $Y = \overline{C} + c(Y - \overline{T}) + \overline{I} + \overline{G}$

위 식에서 Y가 유일한 내생변수(endogenous variable)이며 $\overline{C}$, $\overline{I}$, $\overline{G}$, $\overline{T}$ 등 그 외의 변수들은 모두 외생변수(exogenous variable)이다.[4] 위 식을 전미분 하면 다음과 같다.

⇨

위 식에서 다른 변수들의 변화분은 모두 0이며 G만이 증가했다고 할 때 소득의 증가분은 다음과 같다.

⇨

즉 이 식에서 정부구매승수를 구하면 $\frac{1}{1-c}$이 된다. 마찬가지로 독립소비, 독립투자승수도 $\frac{1}{1-c}$된다. 반면 조세승수는 $\frac{-c}{1-c}$가 된다.

4) 내생변수란 어떤 경제모형 내에서 결정되는 변수를 말하며 외생변수란 경제모형 외에서 주어지는 변수를 말한다. 경제모형을 구성한다는 것은 어떤 변수를 외생변수로 두고 어떤 변수를 내생변수로 둘지를 구분하는 작업과 밀접한 관련이 있다.

2. 비례세가 존재하는 경우

비례세가 존재하는 경우 조세함수가 다음과 같이 변한다.

4)-1 조세 : $T = \overline{T} + tY$ t는 비례세율($= \Delta T / \Delta Y$)

1), 2), 3) 및 4)-1의 식을 정리하면 다음과 같다.

국민소득 결정식-3 : $Y = \overline{C} + c(Y - \overline{T} - tY) + \overline{I} + \overline{G}$

위 식의 모든 변수가 변할 수 있다고 가정하고 전미분하면 다음과 같다.

⇨

위 식에서 다른 변수들의 변화분은 모두 0이며 G만이 증가했다고 할 때 소득의 증가분은 다음과 같다.

⇨

즉 이 식에서 정부구매승수를 구하면 $\frac{1}{1-c(1-t)}$이 된다. 마찬가지로 독립소비, 독립투자 승수도 $\frac{1}{1-c(1-t)}$된다. 반면 정액세승수는 $\frac{-c}{1-c(1-t)}$가 된다.

Topic 4-1 동차함수와 동조함수

1. 동차함수의 의미

– 어떤 함수 $z=f(x,y)$가 어떠한 k에 대해서도 다음의 조건을 만족할 때 우리는 이 함수를 r차 동차함수(homogeneous function of degree r)라고 한다.

$$\forall_{x,y}\ f(kx,ky)=k^r f(x,y)$$

– 즉 r차 동차함수란 원래의 변수들을 모두 k배 했을 때 함수값이 k^r배가 되는 함수를 의미한다.

2. 동차함수의 예

(1) 1차동차함수 : $z=x^{\alpha}y^{1-\alpha}$

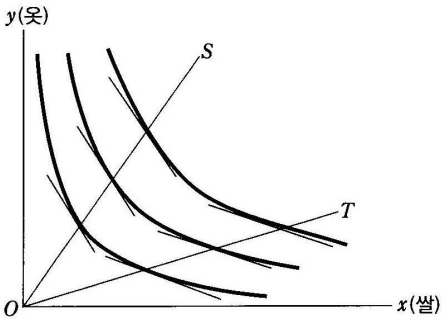
(2) 0차동차함수 : $z=\dfrac{x}{3y}+5$

– 즉 모든 항의 차수의 합이 r로 일정할 때 r차 동차함수가 된다고 생각하면 거의 틀림이 없다.

3. 동차함수의 주요성질-1 : 효용함수, 생산함수에의 응용

– 위 동차함수에서 z의 값을 일정하게 두고 $x-y$평면에 나타내었을 때, 원점에서 나오는 직선상에서의 기울기가 일정하게 구해진다.

– 이와 같이 원점에서 출발하는 직선상에서 기울기가 일정한 함수를 동조함수(homothetic function)이라고 하는데 동차함수는 동조함수의 특수한 경우이다.



Topic 4-2 생산함수와 규모수익의 문제

1. 문제제기
   - 모든 생산요소를 h배로 늘린 경우 산출량은 어떻게 변할 것인가?
   - L, K의 변화와 Q간의 관계

2. 규모수익불변(*CRS* : constant returns to scale)
   - 모든 요소의 투입량을 h배 했을 때, 산출량도 h배되는 경우

$$f(hL, hK) = h \cdot f(L, K)$$

3. 규모수익체증(*IRS* : increasing returns to scale)
   - 모든 요소의 투입량을 h배 했을 때, 산출량이 h배 이상 증가하는 경우

$$f(hL, hK) > h \cdot f(L, K)$$

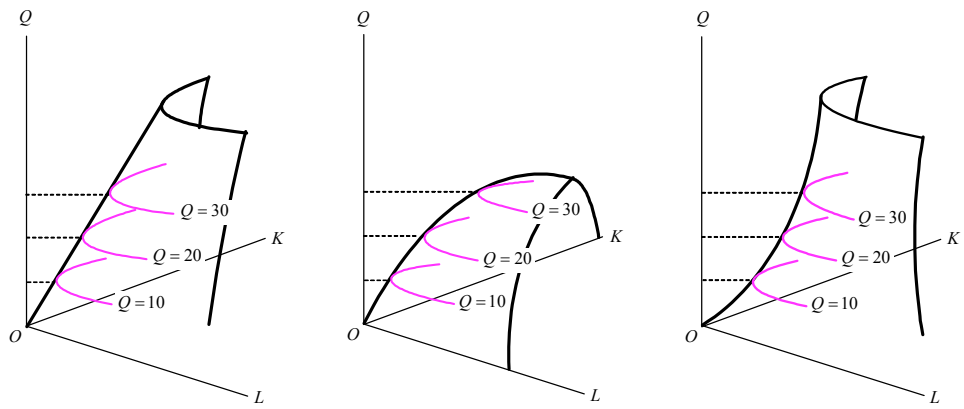
4. 규모수익체감(*DRS* : decreasing returns to scale)
   - 모든 요소의 투입량을 h배 했을 때, 산출량이 h배보다 작게 증가하는 경우

$$f(hL, hK) < h \cdot f(L, K)$$

5. 동차함수의 주요성질-2 : 규모수익에의 응용

위 동차함수의 정의식을 보면 규모수익의 정의식과 상당히 유사함을 알 수 있다.

- 즉 생산함수가 1차 이상의 동차함수일 때는 규모수익체증,
- 생산함수가 1차동차함수일 때는 규모수수익불변,
- 생산함수가 1차 이하의 동차함수일 때는 규모수익체감이 성립한다.



(i) 규모수익불변 (ii) 규모수익체감 (iii) 규모수익체증

Topic 5-1 무한등비수열의 합과 채권가격의 도출

1. 무한등비급수의 공식도출

가. 문제

– 무한등비급수 $S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$ 을 구하라.

나. 도출

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$$
$$rS=\quad ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots\cdots$$
$$(1-r)S=a$$

이를 정리하면 $S=$ ——— 이 된다.

다. 결론

– 결국 초항이 a공비가 r인 무한등비수열의 합은 $S=\dfrac{a}{1-r}$이 된다.

2. 채권가격결정의 기초개념

가. 현재가치(present value : PV)

– 미래의 금액의 가치를 현재시점에서 측정한 것을 현재가치라고 한다.

나. 할인(discount)

– 미래가치를 현재가치화 시키는 작업을 할인이라고 한다.

3. 이자율변화가 채권가격에 미치는 효과

가. 채권가격의 결정

– 지금 구입하면 다음 기부터 매기간 b를 영구히 지급하는 채권의 가격을 구해보자.

$$P_b=\frac{b}{1+r}+\frac{b}{(1+r)^2}+\frac{b}{(1+r)^3}+\cdots$$

이는 초항 $\dfrac{b}{1+r}$, 공비 $\dfrac{1}{1+r}$인 무한등비급수이므로,

$$P_b=\frac{\dfrac{b}{1+r}}{1-\dfrac{1}{1+r}}=$$ – 이 된다.

나. 평가

– 이자율의 상승은 채권으로부터 지급되는 금액의 현재가치를 떨어뜨려 채권가격을 하락시킨다.(-의 상관관계)

Topic 5-2 무한등비수열의 응용 : 정부지출 승수의 도출

1. 정부지출승수의 개념
   - 경제에서 한 사람의 지출은 반드시 다른 사람의 소득이 되며 이는 추가적인 지출로 이어진다.
   - 한계소비성향(marginal propensity to consume)이 c로 일정하게 주어졌을 때, 한 단위 (독립적인) 정부지출의 증가는 얼마의 국민소득 증가를 유발할 것인가?

2. 승수의 도출

가. 단순승수

나. 비례세가 존재하는 경우

3. 연습문제
   - 단순한 승수모형에서 한계소비성향이 0.8로 주어져 있을 때 정부지출이 100 증가하면 총소득은 얼마나 증가하는가?
   - 케인즈 단순모형에서 현재의 균형국민소득이 200 이며, 완전고용국민소득이 450 이라고 한다. 한계소비성향이 0.8이라면, 완전고용에 도달하기 위해 정부지출을 얼마나 늘려야 하는가?

Topic 6 지수함수와 로그함수의 성질

1. 지수함수

가. 일반형

– 지수함수와 로그함수는 원리금계산, 경제성장, 인구증가 등의 현상을 기술하는데 필요할 뿐 아니라 일반적인 동태분석의 기초가 된다. 또한 이 함수들은 여러 가지 편리한 수학적 성질들을 갖고 있어서 경제학의 개념 예를 들어 탄력성과 같은 개념들의 분석에 이용되기도 한다. 따라서 이 두 함수의 성질에 대해 잘 알아 둘 필요가 있다. a를 밑으로 하는 지수함수의 일반형은 다음과 같다.

지수함수의 일반형 : $y = a^x$, 단 $a \neq 1,\ a > 0$

나. 자연지수함수

– 가장 흔하게 쓰이는 지수함수의 밑수는 초월수 $e = 2.71828\ldots$이다. 밑수가 e인 지수함수를 자연지수함수라고 한다.[5)]

자연지수함수 : $y = e^x$

다. 지수함수의 주요성질

– 1. $a^{x+y} = a^x \times a^y$

2. $a^{x-y} = a^x \div a^y$

3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4. $(a^x)^y = a^{xy}$

라. 지수함수의 미분

– 1. $\dfrac{de^x}{dx} = (e^x)' = e^x$

2. $\dfrac{da^x}{dx} = (a^x)' = y\ln a = a^x \ln a$

Tip 1. 지수함수와 로그함수는 역함수로, 45도선에 대해 대칭!
2. (자연)지수함수를 미분하면 (자연)지수함수(자기 자신)이 된다.

---

5) 초월수 e는 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$으로 정의되고 비순환무한소수로서 2.71828... 의 값을 갖는다. e을 밑으로 하는 지수함수 e^t를 특별히 $\exp(t)$로 쓰기도 한다.

2. 로그함수

가. 일반형

– 지수함수의 역함수가 로그함수이다. 즉 지수함수 $y=a^x$ 에 대해서 x를 y의 함수로 표시하면, $x=\log_a y$ 이 된다. 즉 $\log_a x$는 밑 a를 몇 승하면 x가 되는가에 대한 답이다. 예를 들어 $1000 = 10^3$ 이므로 $\log_{10}1000$ 은 3이다. 지수함수에서와 같이 밑 a는 $a\neq 1, a>0$ 의 값으로 제한되고, 또한 이러한 a에 대해 언제나 $y=a^x>0$ 이므로 로그함수의 독립변수 x는 양수 즉 $x>0$ 으로 제한된다.

로그함수의 일반형 : $y=\log_a x$

나. 자연로그함수

– 밑이 초월수 e인 로그함수를 말한다.

자연로그함수 : $y=\log_e x=\ln x$

다. 로그의 주요성질

– 1. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

2. $\log_a\left(\frac{y}{x}\right)=\log_a y-\log_a x$

3. $b\log_a x=\log_a x^b$

4. $a^{\log_a x}=x$

5. 임의의 실수 $c\neq 1,\ c>0$에 대해서, $\log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a}$

라. 로그함수의 미분

– 1. $\frac{d\ln x}{dx}=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

2. $\frac{d\log_a x}{dx}=(\log_a x)'=(\frac{\ln x}{\ln a})'=\frac{1}{x\ln a}$

3. 로그함수의 연습 : 변수의 기간성장률

1) 용어정의

- $\dot{Y}$은 Y의 기간당 변화분 즉 $\frac{dY}{dt}$를 의미한다.
- $\frac{\dot{Y}}{Y}(=\frac{dY/dt}{Y})$은 Y의 기간당 변화율(성장률) 즉 $\frac{dY/Y}{dt}$이 된다.

2) 기하학적 특성

- $\frac{d\ln Y}{dY}=\frac{1}{Y}$이므로 $d\ln Y=\frac{dY}{Y}$가 성립한다.
- 따라서 $\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{dY/Y}{dt}=\frac{d\ln Y}{dt}$가 되며 이 값은 $\ln Y$의 시간경로 즉 $t-\ln Y$평면에서의 곡선의 기울기와 일치한다.

Topic 7 통계이론의 기초

1. 기초개념

가. 확률변수(random variable)

- 일정한 확률에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있는 변수, 확률변수에는 확률변수가 취할 수 있는 값의 개수가 유한적인 이산확률변수(discrete random variable)와, 확률변수가 취할 수 있는 값의 수가 무한적인 연속확률변수(continuous random variable)의 두 종류가 있다.[6)]

나. (수학적)기대값(expected value)

- 확률(確率)의 결과가 수 값으로 나타날 경우 1회의 시행결과로 기대되는 수 값의 크기, 확률변수 X가 취할 수 있는 모든 값이 x_1, x_2, x_3, ……, x_n이고 각 값이 발생할 확률이 p_1, p_2, p_3, ……, p_n일 때 기대값은 다음과 같이 정의된다.

기대값 : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i (= \mu)$

다. 분산(variance)

- 분산은 통계에서 변량이 평균으로부터 떨어져 있는 정도를 나타내는 값이다. 동일한 사례에서 분산은 다음과 같이 정의된다.

분산 : $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - E(X)]^2$

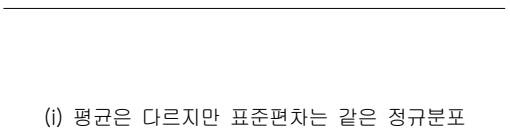
라. 표준편차(standard deviation)

- 분산에 제곱근을 취한 값이다.

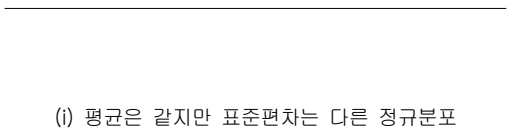
표준편차 : $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

ex> 동전을 던져 앞면이 나오면 20을 주고 뒷면이 나오면 10을 주는 복권이 있다고 하자. 이 복권의 기대가치, 분산, 표준편차를 구하라.

6) 연속확률변수는 정해진 구간내의 모든 값을 취할 수 있을 때의 확률변수라고 정의하기도 한다.



(i) 평균은 다르지만 표준편차는 같은 정규분포



(i) 평균은 같지만 표준편차는 다른 정규분포

2. 정규분포와 표준정규분포

- 정규분포(normal distribution)란 종형(bell shape)의 확률밀도함수를 가진다. 통계적 추론의 중추적 역할을 하는 확률분포로서 자연과 사회현상에서 가장 많이 관찰된다. 평균과 표준편차에 의해서만 그 분포가 설명가능하다. 평균이 μ이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수를 다음과 같이 나타낸다.

  정규분포를 따르는 확률변수 : $X \sim N(\mu, \sigma)$

- 정규분포 중 평균이 0이고 표준편차가 1인 정규분포를 따를 때 이를 표준정규분포(standard normal distribution)라고 한다.

  표준정규분포를 따르는 확률변수 : $Z \sim N(0, 1)$

3. 중심극한정리(central limit theorem)

- 모집단의 분포가 어떤 형태이든 간에 표본의 크기가 충분히 클 때 표본평균 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포를 따르게 된다. 정규분포가 통계학에서 중심적 위치를 점할 수 있는 이론적 배경이 되는 정리이다.

*** 제1일 강의자료 p. 9의 6번째 사례의 답**

$y = \ln x \times \sqrt{3x+2}$ 는 곱의 형태이며 곱의 두 번째 부분은 합성함수이다. $z = 3x+2$로 둘 때, 위 함수는 $y = \ln x \times z^{\frac{1}{2}}$ 이 된다.

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{x} \cdot z^{1/2}\right] + \left[\ln x \cdot \frac{dz^{1/2}}{dz}\frac{dz}{dx}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x} \cdot \sqrt{3x+2}\right] + \left[\ln x \cdot (\frac{1}{2}z^{-1/2}) \cdot 3\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3x+2}}{x} + \frac{3}{2}\frac{\ln x}{\sqrt{3x+2}}$$