

| 제 3 장 |

그래프

그래프는 수학의 여러 분야에서 자주 이용됨은 물론 컴퓨터공학, 화학, 심리학, 사회학, 생태학, 유전학 등의 학문에서도 널리 쓰이는 중요한 항목이다. 특히 반도체, 네트워크, 비행항로 등과 같이 컴퓨터과학과 관련된 분야에서는 여러 가지 복잡한 문제들을 그래프로 나타내고 그래프의 성질을 이용하여 해결하는 경우가 많다. 또 요즘에는 도시계획이나 교통문제 등과 같은 현대생활의 중요한 문제에서도 그래프가 자주 쓰이고 있다. 이 단원에서는 그래프의 뜻과 그래프에서 나오는 용어를 이해하고 간단한 그래프의 성질을 익힌다. 또 실생활에서 일어나는 문제 중에서 그래프로 나타내어 쉽게 해결할 수 있는 문제를 알아본다.

제1절 그래프

집합 안의 두 원소 사이의 관계를 나타낼 때는 그래프로 나타내면 편리하다. 이 절에서는 실생활에서 일어나는 여러 가지 문제를 그래프로 나타내는 방법과 장차 그래프를 공부할 때에 필요한 예와 용어, 간단한 성질에 대하여 알아본다.

예제 3.1.1 6개의 야구팀 A, B, C, D, E, F가 야구 시합을 하고 있다. 지금까지 각 팀의 경기는 아래와 같다.

A팀과 경기한 팀 : C, D, F

B팀과 경기한 팀 : C, E, F

C팀과 경기한 팀 : A, B

D팀과 경기한 팀 : A, E, F

E팀과 경기한 팀 : B, D, F

F팀과 경기한 팀 : A, B, D, E

각 팀을 점으로 나타내고, 지금까지 두 팀이 경기를 했으면 그 두 점을 선으로 이어라.

풀이>>

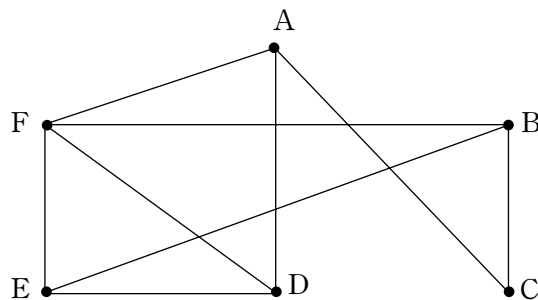


그림 3.1.1

문제 3.1.1

다섯 명 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 가 참여한 모임에서 A_i 가 악수를 교환한 사람은 다음과 같다.

$$A_1 : A_3, A_4$$

$$A_2 : A_4, A_5$$

$$A_3 : A_1, A_4, A_5$$

$$A_4 : A_1, A_2, A_3$$

$$A_5 : A_2, A_3$$

모임에 참석한 사람을 점으로 나타내고, 두 사람이 악수를 했으면 두 사람을 선으로 이어라.

위의 그림 3.1.1과 같이 점과 선으로 이루어진 도형을 그래프라 한다. 그래프를 보다 정확히 정의하면 다음과 같다.

정의 3.1.1 그래프 G 는 유한개의 꼭지점의 집합 V 와 두 꼭지점을 원소로 갖는 변의 집합 E 로 이루어져 있으며 $G(V, E)$ 로 나타낸다. 두 꼭지점 u, v 를 포함하는 변이 있으면 u 와 v 는 **인접**한다고 하며, 변 $e = \{u, v\}$ 는 u 또는 v 와 **근접**한다고 한다.

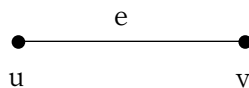


그림 3.1.2

또 꼭지점 v 와 근접한 변의 개수를 v 의 **차수**라고 하고 $d(v)$ 로 나타낸다.

예제 3.1.2 그림 3.1.3의 그래프에서 다음을 구하여라.

- (1) 꼭지점의 집합과 변의 집합
- (2) 꼭지점 A 와 인접한 꼭지점
- (3) 변 e 와 근접한 꼭지점
- (4) 각 꼭지점의 차수

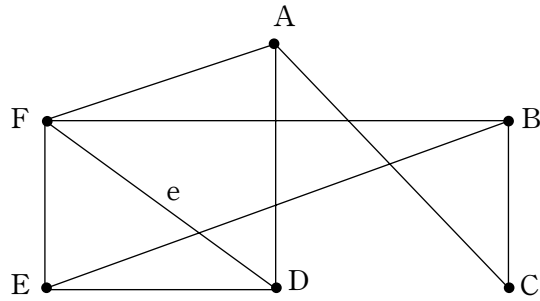


그림 3.1.3

- 풀이>>** (1) 꼭지점의 집합 : $\{A, B, C, D, E, F\}$
 변의 집합 : $\{\{A, C\}, \{A, D\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}\}$
 (2) C, D, F
 (3) D, F
 (4) $d(A)=3, d(B)=3, d(C)=2, d(D)=3, d(E)=3, d(F)=4$ □

문제 3.1.2

다음 그래프에서 꼭지점의 집합과 변의 집합, 그리고 각 꼭지점의 차수를 구하여라.

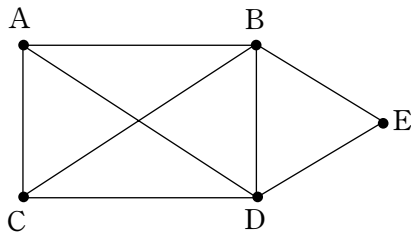


그림 3.1.4

그래프는 꼭지점과 두 꼭지점의 연결 유무만 결정하는 변으로 되어 있기 때문에 꼭지점의 위치, 변을 나타내는 선의 모양이나 길이, 변의 교차점 등은 중요하지 않다. 예를 들어 그림 3.1.5에서 (a)와 (b)는 모양은 다르지만 꼭지점과 그 꼭지점 사이의 관계가 같으므로 같은 그래프이나 (c)는 그 꼭지점의 개수가 (a)나 (b)의 꼭지점의 개수와 다르며 그 관계 또한 같지 않으므로 (a)나 (b)와는 다른 그래프이다.

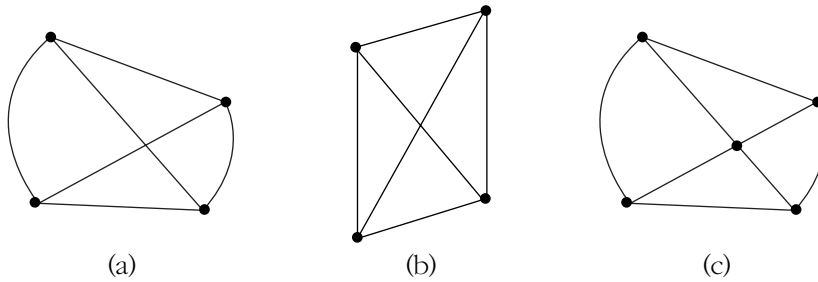


그림 3.1.5

정리 3.1.2

그래프 $G(V, E)$ 에서 모든 꼭지점의 차수의 합은 $2|E|$ 이다. 즉,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

이다.

【증명 1】 그래프에서 변 e 가 두 꼭지점 u, v 와 근접한다면 변 e 는 u 와 v 의 차수를 구할 때 각각 1번씩 세어지므로 모든 꼭지점의 차수의 합에서 두 번 세어진다. 따라서 모든 꼭지점의 차수의 합은 $2|E|$ 이다.

【증명 2】 다음과 같은 집합 S 의 원소의 개수를 두 가지 방법으로 세어보자.

$$S = \{(v, e) \in V \times E \mid v \text{는 변 } e \text{와 근접한 꼭지점}\}$$

먼저 임의의 꼭지점 v 에 대하여 $(v, e) \in S$ 인 것의 개수는 $d(v)$ 개이므로

$$|S| = \sum_{v \in V} d(v)$$

이다. 한편, 임의의 변 e 에 대하여 $(v, e) \in S$ 인 것의 개수는 두 개이므로

$$|S| = 2|E|$$

이다. 따라서 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ 이다. □

예제 3.1.3 변의 개수가 20이고 각 꼭지점의 차수가 4인 그래프의 꼭지점의 개수를 구하여라.

풀이>> 꼭지점의 개수를 x 라 하면 정리 3.1.2에 의해 $4x = 2 \times 20$ 이므로 꼭지점의 개수 $x = 10$ 이다. □

문제 3.1.3

꼭지점의 차수가 각각 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5인 그래프의 변의 개수를 구하여라.

예제 3.1.4 정 n 각형에서 대각선의 개수를 구하여라.

풀이>> 정 n 각형에 모든 대각선을 첨가한 그래프를 $G = G(V, E)$ 라 하자. 그러면 정 n 각형의 대각선의 개수는 $|E| - n$ 이다. 한편, G 의 각 꼭지점의 차수는 $(n-1)$ 이므로 정리 3.1.2에 의해 $n(n-1) = 2 \times |E|$ 이다. 따라서 대각선의 개수는

$$|E| - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

이다. □

문제 3.1.4

p 가 홀수인 소수일 때 그래프 G 의 모든 꼭지점의 차수가 p 이면 G 의 변의 개수는 p 의 배수임을 보여라.

예제 3.1.5 어느 바둑 시합에 7명이 참가하였다. 참가한 7명 모두가 다른 사람과 정확히 세 판의 바둑을 둘 수 있도록 대진표를 작성하여라.

풀이>> 시합에 참가한 사람을 꼭지점으로 하고 두 사람이 경기를 하면 두 꼭지점을 변으로 잇는 그래프를 생각하자. 이 그래프는 각 꼭지점의 차수가 3이므로 모든 꼭지점의 차수의 합은 21이다. 그러나 모든 꼭지점의 차수의 합은 변의 수의 두 배이므로 홀수가 될 수 없다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 대진표는 작성할 수 없다. $\square$

문제 3.1.5

꼭지점의 수가 5이고 각 꼭지점의 차수가 3인 그래프를 모두 찾아라.

이제 그래프 이론에서 자주 이용되는 그래프에 대하여 알아보자.

- (1) 모든 꼭지점 사이에 항상 변이 있는 그래프를 **완전그래프**라 하며 꼭지점의 수가 n 인 완전그래프를 K_n 으로 나타낸다. 예를 들어, K_3, K_4, K_5 는 다음과 같다.

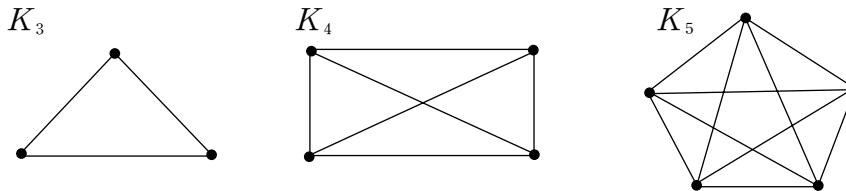


그림 3.1.6

- (2) 다음의 조건 (i), (ii), (iii)을 만족하는 그래프 $G(V, E)$ 를 **이분그래프**라고 한다.

- (i) $V = V_1 \cup V_2, V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 이다.
- (ii) 집합 V_1 에 있는 꼭지점 사이에는 변이 존재하지 않는다.
- (iii) 집합 V_2 에 있는 꼭지점 사이에는 변이 존재하지 않는다.

특히, 이분그래프 G 에서 V_1 의 모든 꼭지점이 V_2 의 모든 꼭지점과 인접하면 G 를 **완전이분그래프**라고 한다. 여기서 $m = |V_1|, n = |V_2|$ 인 완전이분그래프를

$K_{m,n}$ 으로 나타낸다. 아래 그림에서 (a)는 이분그래프이며 (b)는 완전이분그래프 $K_{3,3}$ 이다.



그림 3.1.7

- (3) 아래의 그래프는 이제까지 살펴본 그래프와는 달리 꼭지점 D와 E 사이에 두 개의 변이 있으며 꼭지점 A와 그 자신을 잇는 변(루프라고 함)이 있다. 이처럼 두 꼭지점 사이에 한 변보다 많은 변이 있거나 루프가 있는 그래프를 **다중그래프**라고 한다.

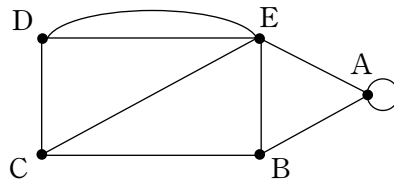


그림 3.1.8

다중그래프에서 변의 모임은 같은 원소가 여러 번 있을 수 있는 다중집합(multiset)으로 나타내어진다. 예를 들어, 위의 다중그래프에서

꼭지점의 집합 = $\{A, B, C, D, E\}$,

변의 모임 = $\{\{A, A\}, \{A, B\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}, \{D, E\}\}$,

$d(A)=4, d(B)=3, d(C)=3, d(D)=3, d(E)=5$

이다.

(4) 다음 그림처럼 각 변에 방향이 있는 그래프를 **유향그래프**라 한다.

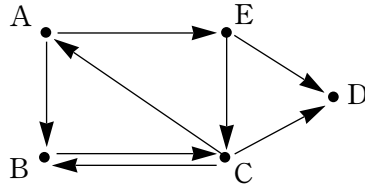


그림 3.1.9

유향그래프의 변은 두 꼭지점으로 이루어진 순서쌍으로 나타낸다. 예를 들어 위의 유향그래프에서

꼭지점의 집합 = $\{A, B, C, D, E\}$,

변의 집합 = $\{(A, B), (A, E), (B, C), (C, A), (C, B), (C, D), (E, C), (E, D)\}$

이다.

(5) $e = \{x, y\}$ 를 그래프 G 의 한 변이라 하자. G 에서 변 e 만을 제거한 그래프를 $G - e$, G 에서 변 e 를 제거한 후 꼭지점 x 를 y 와 일치시킨 그래프를 G/e 로 나타낸다. 또, u, v 가 G 의 인접하지 않은 두 꼭지점이라면 G 에 변 $e' = \{u, v\}$ 를 첨가한 그래프를 $G + e'$ 으로 나타낸다.

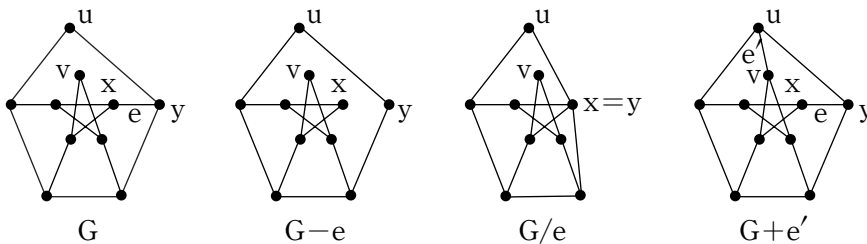


그림 3.1.10

(6) 그래프 $G(V, E)$ 에서 다음과 같이 V', E' 이 결정되는 그래프 $G'(V', E')$ 를 그래프 G 의 **여그래프**라고 한다.

(i) $V = V'$

(ii) $e \in E \Leftrightarrow e \notin E'$

G 의 여그래프 G' 은 G 와 똑같은 꼭지점을 갖으며 G 에서 두 꼭지점 사이에 변이 있으면 G' 에서는 그 두 꼭지점 사이에는 변이 없고, G 에서 두 꼭지점 사이에 변이 없으면 G' 에서는 그 두 꼭지점 사이에 변이 존재하는 그래프이다.

예를 들어 그림 3.1.11에서 (a)의 여그래프는 (b)이고, (b)의 여그래프는 (a)이다.

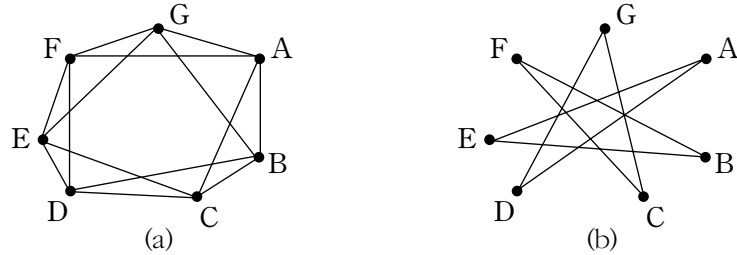


그림 3.1.11

(7) 두 그래프 $G(V, E)$ 와 $G'(V', E')$ 에서 $V' \subseteq V$ 이고 $E' \subseteq E$ 이면 $G'(V', E')$ 를 $G(V, E)$ 의 부분그래프라고 한다.

아래 그림에서 왼쪽 그래프를 $G(V, E)$, 오른쪽 그래프를 $G'(V', E')$ 라 하면

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$V' = \{A, B, C, E, F\}$$

$$E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{E, F\}\}$$

$$E' = \{\{A, C\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, E\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{E, F\}\}$$

이므로 $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ 이다. 따라서 그림 3.1.12 오른쪽 그래프 $G'(V', E')$ 는 아래 왼쪽 그래프 $G(V, E)$ 의 부분그래프이다.

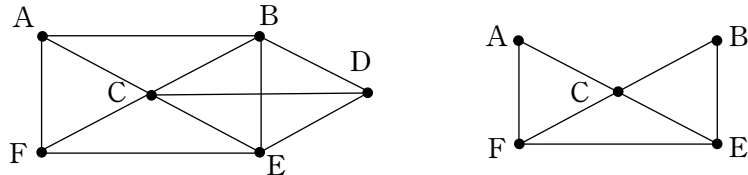


그림 3.1.12

유향그래프나 다중그래프와 비교하여 변에 방향이 없고 루프도 없으며 두 꼭지점 사이에는 많아야 한 개의 변이 있는 그래프를 **단순그래프**라고 한다. 다음부터는 특별한 언급이 없으면 그래프는 모두 단순그래프를 뜻하는 것으로 약속한다.

예제 3.1.6 꼭지점의 개수가 n 인 단순그래프에서 각 꼭지점의 차수는 $(n-1)$ 이하임을 보여라.

풀이>> 단순그래프에서는 한 꼭지점과 다른 꼭지점을 잇는 변의 개수는 많아야 한 개 이므로 각 꼭지점의 차수는 그와 다른 꼭지점의 개수인 $n-1$ 이하이다. $\square$

문제 3.1.6

꼭지점의 개수가 6이고 각 꼭지점의 차수가 모두 3인 단순그래프를 찾아라.

예제 3.1.7 완전그래프 K_n 와 완전이분그래프 $K_{m,n}$ 의 변의 개수를 각각 구하여라.

풀이>> K_n 의 변의 수를 $|E|$ 라 하자. K_n 는 꼭지점의 수가 n 이고 각 꼭지점의 차수가 $(n-1)$ 인 단순그래프이므로, 정리 3.1.2에 의하여

$$2|E| = n(n-1)$$

이다. 따라서 $|E| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ 이다.

한편 $K_{m,n}$ 에서는 m 개의 꼭지점 하나하나에 근접한 변이 n 개씩 있으므로 $K_{m,n}$ 에는 mn 개의 변이 있다. $\square$

문제 3.1.7

5개의 변을 갖고 있는 완전이분그래프를 찾아라.

예제 3.1.8 다음 그래프는 이분그래프임을 보여라.

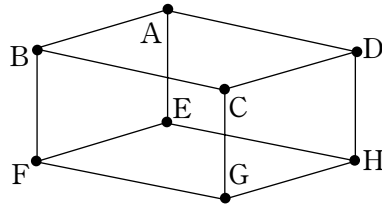


그림 3.1.13

풀이>> 꼭지점 A는 꼭지점 B, D, E와 인접하고, 꼭지점 C, G, F, H와는 인접하지 않는다. 이 중 G는 꼭지점 B, D, E와 인접하지 않으므로 위에 주어진 그래프는 다음 그림의 이분그래프와 같다.

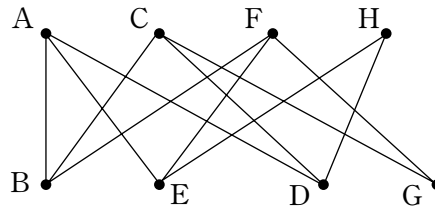


그림 3.1.14

□

문제 3.1.8

다음 그래프는 이분그래프임을 보여라.

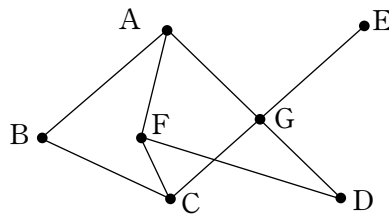


그림 3.1.15

예제 3.1.9 아래 그래프 G 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

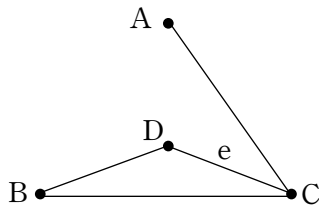


그림 3.1.16

- (1) G 의 여그래프 G' 을 그려라.
- (2) $e = [C, D]$ 일 때 G/e 를 그려라.

풀이>>

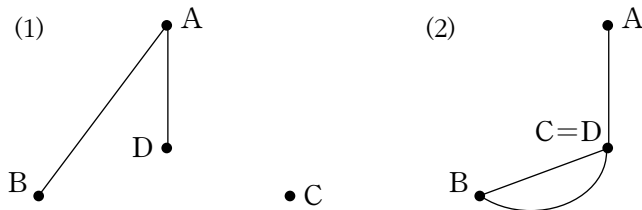


그림 3.1.17

□

문제 3.1.9

아래 그래프 G 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

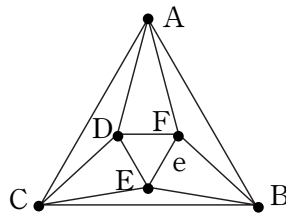


그림 3.1.18

- (1) G 의 여그래프 G' 을 그려라.
- (2) $e = [E, F]$ 일 때 G/e 를 그려라.

>> 연습문제 3.1

1 네 직종 A_1, A_2, A_3, A_4 에 직원을 각각 한명씩 뽑으려는 어느 회사에 다섯 사람 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 가 지원하였다. 다음은 각 지원자가 할 수 있는 직종을 나타낸 것이다.

$$\begin{array}{ll} a_1 : A_2, A_3, A_4 & a_2 : A_1, A_2, A_4 \\ a_3 : A_1, A_4 & a_4 : A_1, A_3 \\ a_5 : A_3, A_4 & \end{array}$$

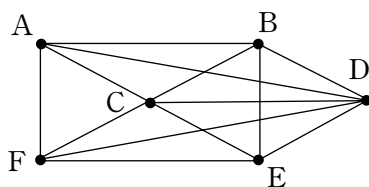
직종과 지원자를 꼭지점으로 하고 지원자 a_i 가 A_j 의 직종의 일을 할 수 있으면 a_i 와 A_j 를 잇는 변을 가진 그래프를 그려라.

2 집합 C 를 다음과 같은 구간의 집합이라 하자.

$$C = \{[-4, 2], [0, 1], (-8, 2], [2, 4], [4, 10)\}$$

집합 C 에 있는 구간을 꼭지점으로 하고 두 구간 사이에 공통부분이 있으면 두 구간 사이에 변이 있는 그래프를 그려라.

3 아래 그래프의 꼭지점의 집합, 변의 집합, 그리고 각 꼭지점의 차수를 구하여라.



4 다음은 어떤 그래프의 꼭지점의 차수를 나타낸 것이다. 이 그래프의 변의 수를 구하고 그래프를 그려라.

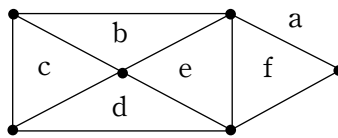
- (1) 0, 1, 1, 2, 2
- (2) 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6

5 완전이분그래프 $K_{5,2}$ 를 그려라.

6 참가자가 5명인 모임에서 각자 악수한 횟수가 모두 한 번일 수 있는가?

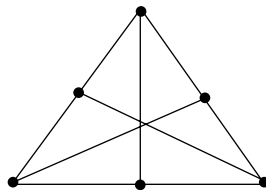
7 변의 개수와 꼭지점의 개수가 같은 완전이분그래프를 모두 구하여라.

8 아래의 그래프를 G 라 하자.



위의 그래프의 영역 a, b, c, d, e, f 를 꼭지점으로 하고 두 영역 사이에 공통변이 있으면 그 두 영역에 해당하는 두 꼭지점이 인접하도록 그래프 $D(G)$ 를 그려라. 이런 방법으로 만들어진 그래프 $D(G)$ 를 그래프 G 의 **쌍대그래프**라 한다.

9 아래 그래프는 이분그래프인가?



10 꼭지점이 A, B, C인 단순그래프를 모두 그려라.

11 그래프에서 차수가 홀수인 꼭지점은 짝수 개 있음을 보여라.

12 n 개의 꼭지점 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 갖는 단순그래프에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 변의 개수는 최대 얼마인가?

(2) n 개의 꼭지점을 갖는 그래프는 모두 몇 개인가?

13 꼭지점의 수가 둘 이상인 단순그래프에는 항상 차수가 같은 두 꼭지점이 있음을 보여라.

14 꼭지점의 수가 $(m+n)$ 이고, 차수가 홀수인 꼭지점의 개수가 m , 짝수인 꼭지점의 개수가 n 인 그래프를 그려라. (단, m, n 는 자연수, m 은 짝수)

15 영호의 부모님은 주말에 두 쌍의 부부를 집으로 초대하였다. 영호의 어머니가 다른 다섯 사람에게 각각 악수한 횟수를 물어 보니 그 답이 모두 달랐고 누구도 자신의 배우자와는 악수를 하지 않았다고 한다. 영호 아버님과 어머니는 각각 몇 번 악수를 하였을까?

제2절 그래프의 동형

그래프는 꼭지점과 두 꼭지점의 연결 유무만을 결정하는 변으로 되어 있기 때문에 같은 성질의 그래프라 하더라도 꼭지점의 위치, 변의 모양, 변의 교차점 유무, 꼭지점에 붙여진 문자 등에 따라 서로 달라 보일 수 있다. 이 절에서는 주어진 두 그래프가 같은 성질을 갖는 그래프인지 아닌지를 판별하는 방법에 대하여 살펴본다.

예제 3.2.1 아래 그림의 왼쪽 그래프를 꼭지점이나 변을 제거하거나 첨가하지 않고 꼭지점만을 움직여 오른쪽 그래프로 만들 수 있는가?



그림 3.2.1

풀이>> 그림 3.2.1의 왼쪽 그래프에 아래와 같이 각 꼭지점에 번호를 붙이자. 이제 꼭지점 C를 꼭지점 A, B, D로 이루어진 삼각형 안에 놓으면 오른쪽 그래프가 된다.

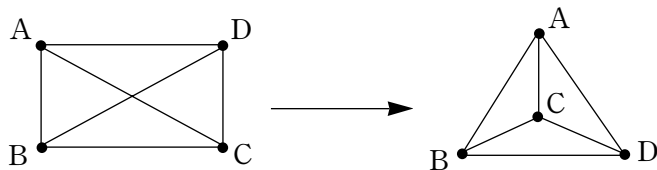


그림 3.2.2

문제 3.2.1

아래 그림에서 꼭지점이나 변을 제거하거나 첨가하지 않고 꼭지점만을 움직여 왼쪽 그래프를 오른쪽 그래프로 만들어라.

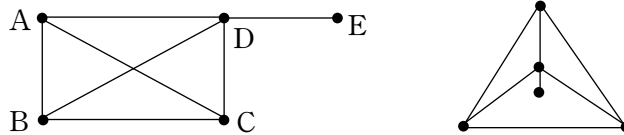


그림 3.2.3

앞에서 언급한대로 그래프는 꼭지점과 두 꼭지점의 연결 유무만을 결정하는 변으로 되어 있어 꼭지점의 위치나 변의 모양, 변의 교차점 등은 중요하지 않다. 그렇기 때문에 경우에 따라서는 그림 3.2.1과 같이 서로 다른 그래프로 보이지만 같은 성질을 나타내는 그래프일 수 있다. 이처럼 같은 성질을 나타내는 두 그래프를 서로 동형이라 한다. 그래프 동형의 수학적 정의는 다음과 같다.

정의 3.2.1 두 그래프 $G(V, E)$ 와 $G'(V', E')$ 에서 다음 두 조건 (i)과 (ii)를 만족하는 함수 $f: V \rightarrow V'$ 를 그래프 G 에서 G' 으로 가는 동형사상이라고 한다.

- (i) f 는 일대일대응 함수이고,
- (ii) $\{a, b\} \in E \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E'$

즉, 함수 f 가 동형이면 G 에서 두 꼭지점 a 와 b 사이에 변이 있을 때 G' 에서도 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 변이 있으며 그 역도 참이다. 두 그래프 G 와 G' 사이에 적어도 하나의 동형사상이 있으면 두 그래프는 동형이라 하고 $G \cong G'$ 로 나타낸다.

예제 3.2.2 다음 두 그래프는 동형임을 보여라.

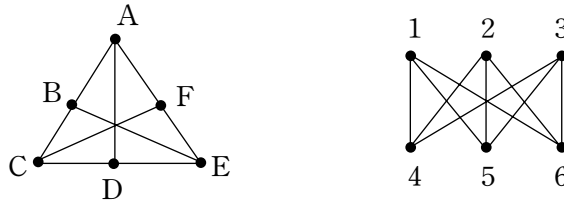


그림 3.2.4

풀이>> 위의 두 그래프를 각각 $G(V, E)$ 와 $G'(V', E')$ 이라 하고 함수 $f: V \rightarrow V'$ 를

$$A \leftrightarrow 1, B \leftrightarrow 4, C \leftrightarrow 2, D \leftrightarrow 5, E \leftrightarrow 3, F \leftrightarrow 6$$

으로 정의하면 G 와 G' 의 변은 각각

$$\begin{aligned} \{A, B\} &\leftrightarrow \{1, 4\}, & \{A, D\} &\leftrightarrow \{1, 5\}, & \{A, F\} &\leftrightarrow \{1, 6\}, \\ \{B, C\} &\leftrightarrow \{4, 2\}, & \{B, E\} &\leftrightarrow \{4, 3\}, & \{C, D\} &\leftrightarrow \{2, 5\}, \\ \{C, F\} &\leftrightarrow \{2, 6\}, & \{D, E\} &\leftrightarrow \{5, 3\}, & \{E, F\} &\leftrightarrow \{3, 6\} \end{aligned}$$

로 대응되므로 함수 f 는 동형사상이고, 따라서 그래프 G 는 G' 과 동형이다. $\square$

문제 3.2.2

다음 두 그래프는 동형임을 보여라.

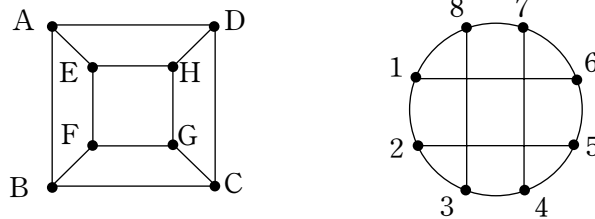


그림 3.2.5

예제 3.2.3 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지 판별하여라.

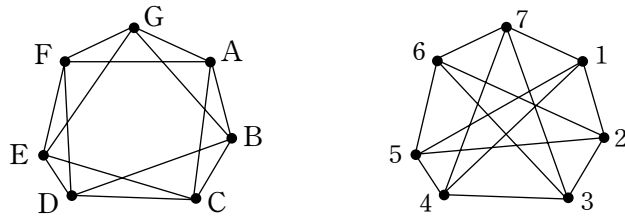


그림 3.2.6

풀이>> 위의 그래프에서는 변이 많아 동형사상을 찾기가 쉽지 않다. 이럴 경우 두 그래프가 동형이면 그것의 여그래프도 동형이며 그 역 또한 참이기 때문에 주어진 그래프의 여그래프를 살펴보면 좀 더 쉽게 동형 여부를 판단할 수 있다. 그림 3.2.6의 두 그래프의 여그래프는 각각 아래 그림의 두 그래프와 같다.

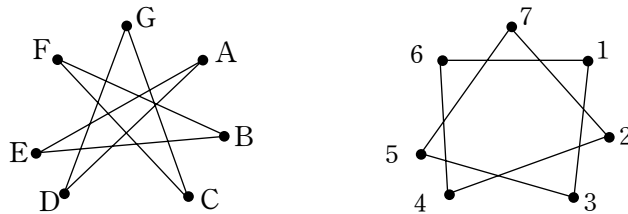


그림 3.2.7

이제 $A \leftrightarrow 1, B \leftrightarrow 4, C \leftrightarrow 7, D \leftrightarrow 3, E \leftrightarrow 6, F \leftrightarrow 2, G \leftrightarrow 5$ 로 대응시키면 이 함수는 동형사상이 되어 그림 3.2.7의 두 그래프는 동형이다. 따라서 그림 3.2.6의 두 그래프도 동형이다. □

문제 3.2.3

다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.

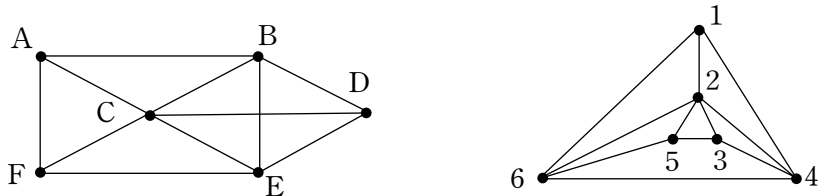


그림 3.2.8

주어진 두 그래프가 동형인지 아닌지를 결정하기 위해서는 우선 동형인지 아닌지를 먼저 추측하고 동형이라고 판단되면 두 그래프 사이에 적당한 동형사상을 찾아야 하며 그렇지 않으면 두 그래프의 다른 성질을 찾아 동형이 아니라는 결론을 짓는다. 동형사상에 의하여 변하지 않는 성질들은 꼭지점이나 변의 수, 같은 차수의 꼭지점의 수 등이 있고 다음에 배우게 될 길이가 일정한 회로의 수, 연결성이나 평면성, 오일러회로나 해밀턴회로의 유무 등이 있다.

예제 3.2.4 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하라.

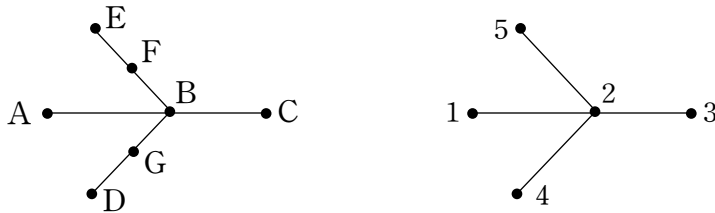


그림 3.2.9

풀이>> 두 그래프가 동형이면 꼭지점의 수가 같다. 그러나 위의 두 그래프는 꼭지점의 수가 다르므로 동형이 아니다. □

문제 3.2.4

다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.

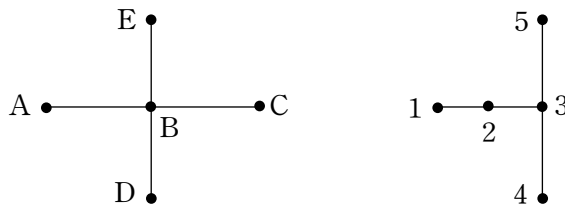


그림 3.2.10

예제 3.2.5 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.

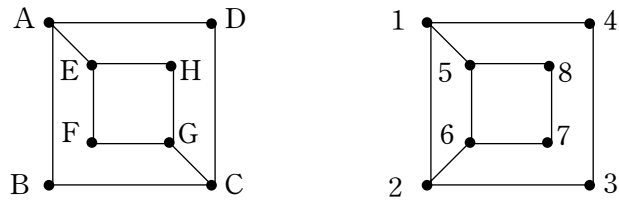


그림 3.2.11

풀이>> 두 그래프에서 차수가 3인 꼭지점을 생각해보자. 왼쪽 그래프에서는 차수가 3인 꼭지점 A, C, E, G가 두 부분으로 되어 있으나 오른쪽 그래프에서는 차수가 3인 꼭지점 1, 2, 5, 6이 한 부분으로 연결되어 있다. 동형이면 그래프의 성질이 같아야 하므로 위의 두 그래프는 동형이 아니다. □

문제 3.2.5

다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.

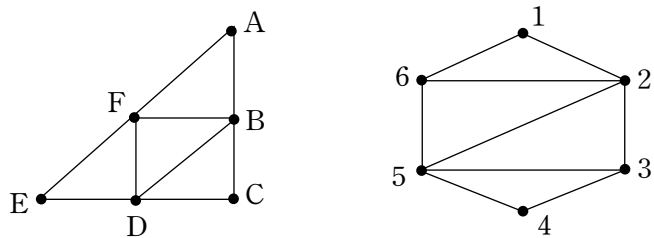
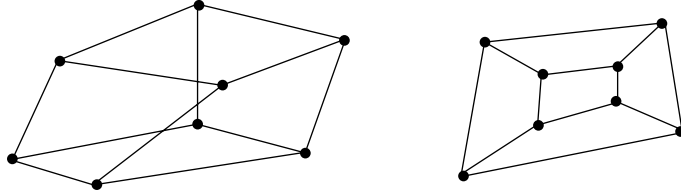


그림 3.2.12

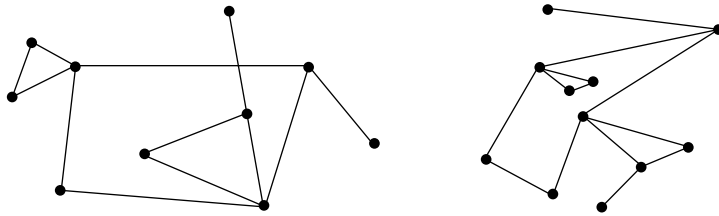
지금까지 두 그래프의 동형여부를 살펴보았다. 그러나 그래프의 꼭지점의 수가 많아지면 두 그래프가 동형인지 아닌지를 결정하는 것은 현재까지도 효과적인 방법이 알려져 있지 않은 어려운 문제이다.

>> 연습문제 3.2

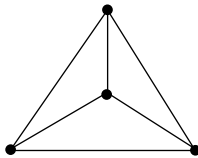
1 다음 두 그래프는 동형인가?



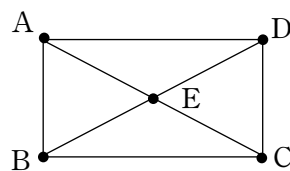
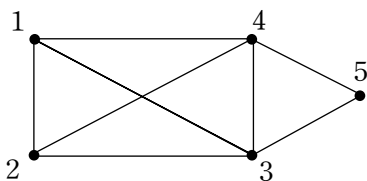
2 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.



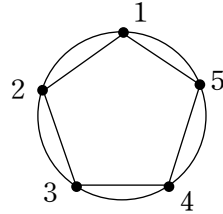
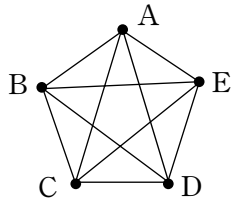
3 다음 그래프 G 의 쌍대그래프 $D(G)$ 를 그리고 G 와 $D(G)$ 가 동형인지 아닌지를 판별하여라. (제1절 문제 8번 참조)



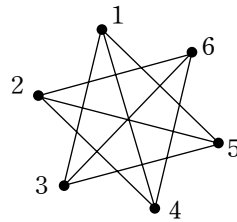
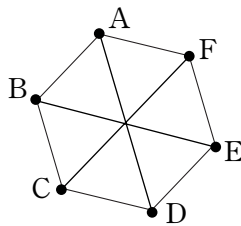
4 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.



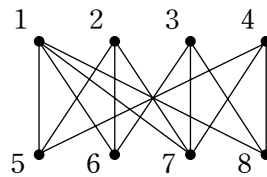
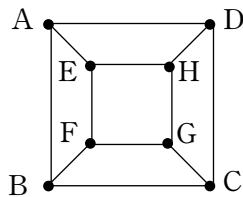
5 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.



6 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.

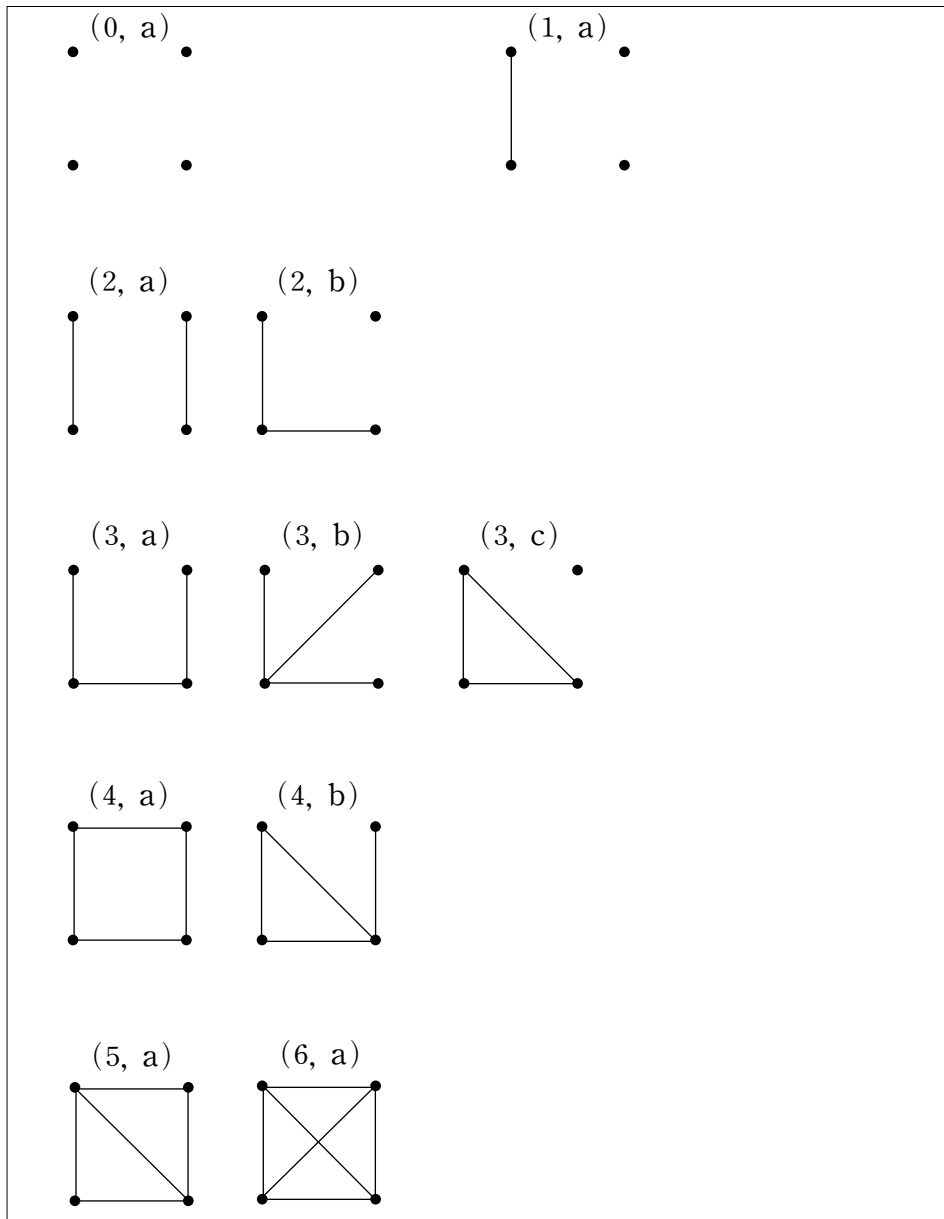


7 다음 두 그래프가 동형인지 아닌지를 판별하여라.



8 다음 그림은 네 꼭지점을 갖는 동형이 아닌 모든 그래프를 변의 개수에 따라 분류한 것이다. 다음 물음에 답하여라.

- (1) 변의 개수가 같은 것끼리는 서로 동형이 아님을 보여라.
- (2) 각 그래프의 여그래프를 그리고 그것과 동형인 그래프를 그림에서 찾아라.
- (3) 여그래프가 본래의 그래프와 동형인 그래프를 찾아라.



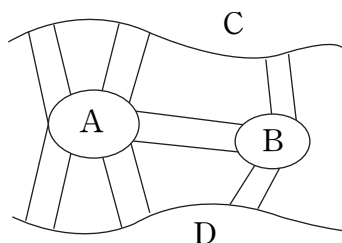
9 꼭지점이 5개인 그래프에서 여그래프가 자기 자신과 동형인 것을 찾아라.

10 꼭지점이 6개인 그래프에서 여그래프가 자기 자신과 동형인 것을 찾아라.

제3절 오일러 회로와 해밀턴 회로

그래프에 관하여 가장 유명한 문제는 오일러가 해결한 다음과 같은 쾨니스베르크의 다리문제이다.

18세기 독일 쾨니스베르크의 프레겔 강에는 오른쪽 그림처럼 두 개의 섬과, 이 섬과 섬 또는 섬과 육지를 연결하는 7개의 다리가 있었다. 섬이나 육지의 한 지점에서 출발하여



여 모든 다리를 정확히 한번만 지나 원래 출발한 지점으로 돌아올 수 있는가? 이 절에서는 위의 다리문제처럼 주어진 그래프에서 꼭지점 또는 변을 모두 한 번만 지나 출발한 원래의 지점으로 돌아올 수 있는가 하는 문제에 대하여 살펴 보도록 한다.

예제 3.3.1 아래 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.

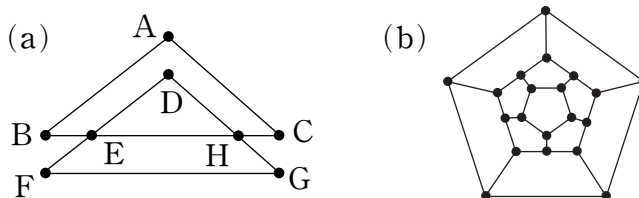


그림 3.3.1

- (1) 그래프 (a)에서는 한 꼭지점에서 출발하여 연필을 떼지 않고 변을 따라 모든 변을 정확히 한번만 지나 원래 출발했던 꼭지점으로 돌아올 수 있는가?
- (2) 그래프 (b)에서는 한 꼭지점에서 출발하여 연필을 떼지 않고 변을 따라 모든 꼭지점을 정확히 한번만 통과한 후에 원래 출발했던 꼭지점으로 돌아올 수 있는가?

풀이>> (1) $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow A$

- (2) 그림 3.3.2의 진하게 표시된 선을 따라가면 모든 꼭지점을 정확히 한번만 통과한 후에 원래 출발했던 꼭지점으로 돌아올 수 있다.

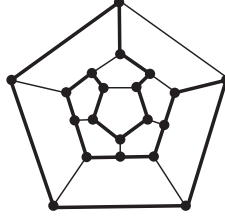


그림 3.3.2

정의 3.3.1 그래프 또는 다중그래프에서 꼭지점 v_i 와 v_{i+1} 을 잇는 변을 e_i 라 하면

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots e_{k-1} v_k e_k v_{k+1}$$

을 길이가 k 인 **길(walk)**이라고 하며 v_1 과 v_{k+1} 을 각각 이 길의 **시작점**과 **끝점**이라 한다. 단순그래프에서는 인접한 두 꼭지점이 주어지면 그 두 꼭지점을 잇는 변은 자동적으로 결정되므로 $v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots e_{k-1} v_k e_k v_{k+1}$ 에 나타난 변을 생략하여 이 길을

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_k \rightarrow v_{k+1}$$

로 나타내기도 한다. 또 변이 반복되지 않는 길을 **경로(path)**라 하며 시작점과 끝점이 같은 경로를 **회로(cycle)**라고 한다.

예를 들어 아래 그림에서 AbBeDeBcCdD는 시작점이 A이고 끝점이 D인 길이 5인 길이며, DaAbBcC는 시작점이 D이고 끝점이 C인 길이 3인 경로이고, AbBcCdDaA는 길이 4인 회로이다.

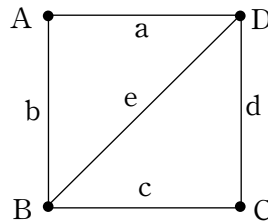


그림 3.3.3

정의 3.3.2 그래프 G 에서 두 꼭지점 u, v 사이에 경로가 있을 때 u, v 는 **연결되어** 있다고 한다. 또 임의의 두 꼭지점이 연결되어 있는 그래프를 **연결그래프**라 한다.

예를 들어, 아래 그림에서 (a)는 연결그래프이나 (b)는 연결그래프가 아니다.

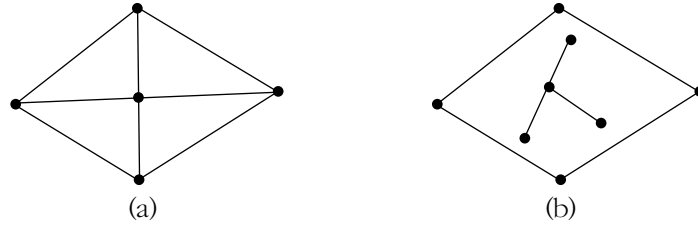


그림 3.3.4

예제 3.3.2 아래 그래프에서 다음 물음에 답하여라.

- (1) 시작점이 A이고 끝점이 C이며 길이가 4인 길을 모두 찾아라.
- (2) 시작점이 A이고 끝점이 C이며 길이가 4인 경로를 모두 찾아라.
- (3) 이 그래프는 연결그래프인가?

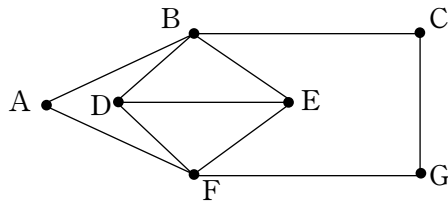


그림 3.3.5

풀이>> (1) 길에 나타나는 꼭지점만을 차례로 나타내면 다음과 같다.

$A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$,
 $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow C$, $A \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$,
 $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$

(2) $A \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C$, $A \rightarrow F \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$

(3) 임의의 두 꼭지점 사이에 항상 경로가 있으므로 이 그래프는 연결그래프이다. $\square$

문제 3.3.1

아래 그래프를 보고 다음 물음에 답하여라.

- (1) 시작점이 A이며 길이가 3인 경로를 모두 찾아라.
- (2) 꼭지점 A에서 출발하는 길이 4인 회로를 모두 찾아라.

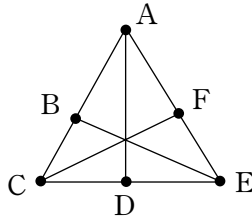


그림 3.3.6

예제 3.3.3 다음은 집을 짓기 위한 작업과 그 작업을 끝마치기 위해 필요한 작업 일수와 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다.

기호	작업	작업일수	먼저 행해져야 할 작업
A	집의 설계	3	없음
B	기초 및 골조공사	17	A
C	배관 공사	5	B
D	전기, 전화 공사	3	B
E	냉난방 공사	7	D
F	미장 공사	9	C, E
G	외부 공사	15	B
H	내부 공사	7	F
I	조경 공사	4	G

표 3.3.1

- (1) 집짓기를 끝마치려면 적어도 몇 날이 필요한가?
- (2) 작업이 하루 늦어져도 전체 작업일수에는 지장을 주지 않는 작업은 무엇인가?

풀이>> 위의 표에 나타난 작업을 꼭지점으로 나타내고 작업 X가 작업 Y전에 행해져야 한다면 꼭지점 X와 Y가 인접하도록 그래프를 그리면 다음과 같다. 여기서 꼭지점에 있는 수는 그 작업을 끝내기 위해 필요한 작업일수이다.

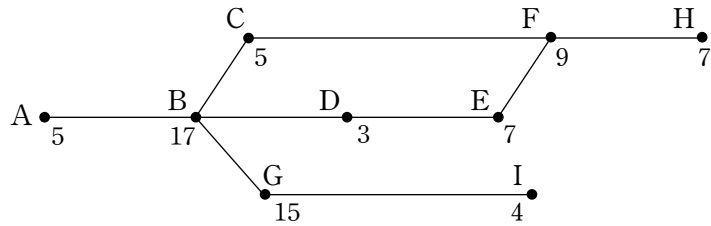


그림 3.3.7

- (1) 집짓기에 필요한 모든 작업을 마치기 위해서는 A부터 시작하여 위의 그래프의 변을 따라 H와 I까지의 일을 마쳐야 한다. 따라서 주어진 문제는 위의 그래프에서 시작점이 A이고 끝점이 H나 I인 경로 중 꼭지점 위에 있는 수의 합이 가장 큰 경로를 찾는 문제와 같다.

시작점이 A이고 끝점이 H나 I인 경로와 각 경로에 있는 꼭지점 위의 수의 합은 아래와 같다.

$$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H : 3 + 17 + 3 + 7 + 9 + 7 = 46$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow H : 3 + 17 + 5 + 9 + 7 = 41$$

$$A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow I : 3 + 17 + 15 + 4 = 39$$

따라서, 집짓기를 모두 끝마치려면 적어도 46일이 필요하다.

- (2) 위 (1)에서 알 수 있듯이 경로 $P : A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H$ 에 나타난 꼭지점의 순서로 작업을 하게 되고 위의 작업을 하는 동안 P 에 있지 않은 꼭지점의 작업을 병행할 수 있다. 따라서 경로 P 에 있는 꼭지점의 작업이 늦어지면 전체 작업일수도 늦어지게 되나 P 에 있지 않은 꼭지점의 작업은 하루가 늦어져도 전체 일수에는 영향을 주지 않는다. 즉, 경로 P 에 있지 않은 작업 C, G, I는 작업일수가 하루 늦어져도 전체 작업 일수에는 영향을 주지 않는다. □

문제 3.3.2

다음은 아파트 수리를 하기 위한 작업과 그 작업을 끝마치기 위해 필요한 작업 시간, 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다. 아파트 수리를 끝마치려면 적어도 몇 시간이 필요한가?

기호	작업	작업시간	먼저 행해져야 할 작업
B	화장실 청소	8	P
C	거실 청소	4	S, W
F	각종 필터 교환	1	P
G	침실 청소	8	B, F, K
K	부엌 청소	12	P
L	전구 청소 및 교환	1	없음
P	페인트 작업	32	L
S	각종 탐지기 청소 및 전지 교환	1	G
W	창문 닦기	4	G

표 3.3.2

정의 3.3.3 단순그래프나 다중그래프에서 모든 변을 정확히 한번만 통과하는 경로를 **오일러경로**라고 하고 시작점과 끝점이 같은 오일러경로를 **오일러회로**라고 한다. 또 모든 꼭지점을 정확히 한번만 통과하는 회로를 **해밀턴회로**라고 한다.

예를 들어, 아래 그림에서

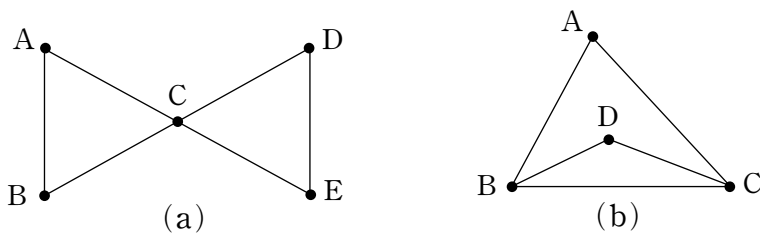


그림 3.3.8

- (1) 그래프 (a)에서 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$ 는 오일러회로이다.
- (2) 그래프 (b)에서 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$ 는 해밀턴 회로이다.
- (3) 그래프 (b)에서 $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 는 오일러경로이다.
- (4) 그래프 (a)에는 해밀턴 회로가 없고, (b)에는 오일러회로가 없다.

예제 3.3.4 다음 그래프에서 오일러회로를 찾아라.

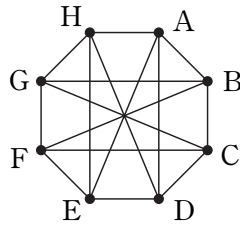


그림 3.3.9

풀이>> 회로 $A \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow A$ 는 위 그래프의 모든 변을 한번만 통과하는 오일러회로이다. □

문제 3.3.3

다음 그래프에서 오일러회로를 찾아라.

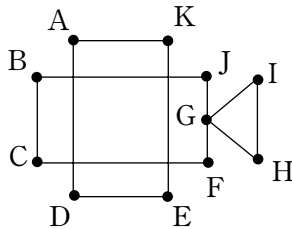


그림 3.3.10

예제 3.3.5 다음 그래프에서 해밀턴회로를 찾아라.

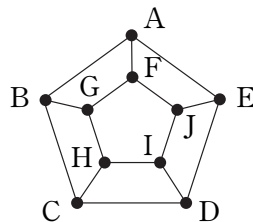


그림 3.3.11

풀이>> 회로 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow J \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow A$ 는 위 그래프의 모든 꼭지점을 한번만 통과하는 해밀턴회로이다. □

문제 3.3.4

다음 그래프에서 해밀턴회로를 찾아라.

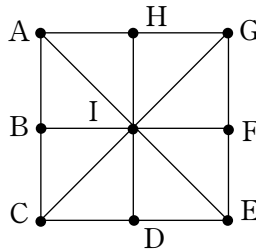


그림 3.3.12

정리 3.3.4

연결그래프(또는 연결 다중그래프) G 에서 오일러회로가 존재하기 위한 필요충분 조건은 모든 꼭지점의 차수가 짝수이다.

【증명】 연결그래프 G 가 오일러회로 C 를 갖는다고 하자. v 를 G 의 임의의 꼭지점이라 하면 v 는 C 위의 점이므로 어떤 꼭지점에서 v 로 연결하는 변이 있으며 또 v 는 다른 변으로 연결되어야 한다. 즉 v 로 들어오는 변이 있으면 v 에서 나가는 변이 존재하므로 v 의 차수는 짝수이다.

역으로, v_1 을 G 의 한 꼭지점이라 하면 G 는 연결그래프이므로 v_1 은 다른 꼭지점 v_2 와 연결되어 있고, v_2 의 차수는 짝수이므로 v_2 는 다른 꼭지점 v_3 와 연결되어 있다. 계속하여 이런 과정을 되풀이 하면 꼭지점의 수는 유한하므로 결국 이 경로는 출발점인 v_1 으로 돌아와 회로 C 를 이루게 된다. 이 회로 C 가 G 의 모든 변을 포함하고 있으면 C 는 G 의 오일러 회로가 된다.

만약 C 가 G 의 오일러회로가 아니라면 G 에서 C 의 모든 변을 지운 그래프

G' 은 몇 개의 연결부분그래프로 나누어지고 G' 의 모든 꼭지점의 차수도 짝수이다.(그림 3.3.13 참조)

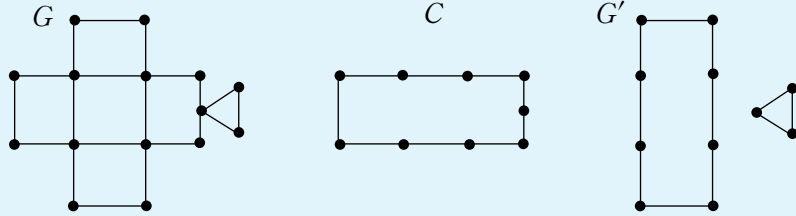


그림 3.3.13

원래 그래프 G 가 연결그래프이므로 C 와 G' 은 적어도 한 개 이상의 꼭지점을 공유하며 그 중 하나를 w 라 하자. 앞의 C 를 만드는 것과 같은 방법으로 w 에서 시작하여 G' 의 변을 이용하여 새로운 회로 C' 을 만든다. 이제 아래 그림과 같이 회로 C 와 C' 을 결합하여 새로운 회로 C_1 을 만든다.

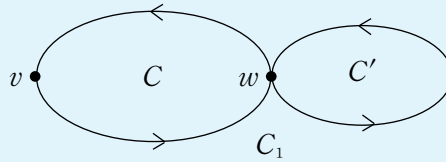


그림 3.3.14

즉, C_1 은 회로 C 의 한 꼭지점 v 에서 출발하여 C 의 변을 따라 가다가 꼭지점 w 에 이르면 회로 C' 의 변을 따르고 다시 꼭지점 w 에 이르면 C 의 남은 변을 따라 원래 출발한 꼭지점 v 로 돌아오는 회로이다.

이렇게 만들어진 회로 C_1 이 G 의 모든 변을 포함하고 있으면 C_1 은 G 의 오일러회로가 된다. 만약 C_1 이 G 의 오일러회로가 아니라면 G 에서 C_1 의 모든 변을 지운 그래프 G'' 의 변을 이용하여 새로운 회로를 만들고 위 C_1 과 결합시켜 더 큰 회로를 만든다. 남아 있는 G 의 변이 없을 때까지 이런 과정을 계속하면 마지막에 얻어진 회로는 G 의 오일러회로가 된다. □

예제 3.3.6 다음 그림은 앞에서 언급한 쾨니히스베르그에 있는 프레젤 강 의 섬 과 다리를 나타낸 것이다.

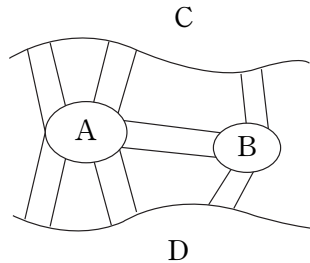


그림 3.3.15

섬이나 육지의 한 지점에서 출발하여 모든 다리를 정확히 한번만 지나 원래 출발한 지점으로 돌아올 수 있는가?

풀이>> 위의 그림에서 섬과 육지를 꼭지점으로 나타내고 그것들이 다리로 연결되어 있으면 그 두 꼭지점이 서로 인접하도록 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.

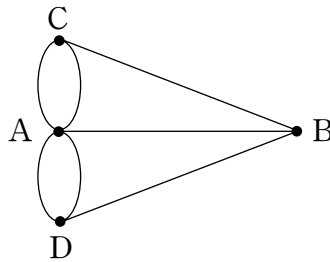


그림 3.3.16

그러면 주어진 문제는 위 그래프에서 오일러회로가 존재하는가 하는 문제와 같다.

그러나 위의 그래프에는 차수가 홀수인 꼭지점이 A, B, C, D 넷이므로 정리 3.3.4에 의하여 오일러회로가 존재하지 않는다.

따라서 그림 3.3.15에서 모든 다리를 정확히 한번만 지나 원래 출발한 지점으로 돌아올 수 있는 방법은 없다. □

문제 3.3.5

아래 그래프에는 오일러회로가 존재하는가? 오일러회로가 존재하는 경우에는 오일러회로를 찾아라.

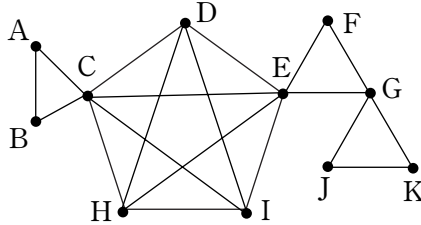


그림 3.3.17

예제 3.3.7 연결그래프(또는 연결다중그래프) G 에서 오일러경로가 존재하기 위한 필요충분조건은 홀수 차수를 갖는 꼭지점의 수가 0 또는 2임을 보여라.

풀이>> 그래프 G 에서 오일러경로 $P : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n$ 가 존재한다고 하자.

- ① $v_1 = v_n$ 이면 P 는 G 의 오일러회로가 되고 정리 3.3.4에 의하여 모든 꼭지점의 차수는 짝수이다.
- ② $v_1 \neq v_n$ 이면 그래프 G 에 변 $\{v_1, v_n\}$ 을 첨가한 그래프를 G' 이라 하자. 그러면 경로 $P : v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n \rightarrow v_1$ 은 G' 의 오일러회로가 되므로 G' 에서의 모든 꼭지점의 차수는 짝수이다. 따라서 그래프 G 에서 v_1 과 v_n 의 차수는 홀수이고 나머지 모든 꼭지점의 차수는 짝수이다.

역으로, 연결그래프 G 의 홀수 차수를 갖는 꼭지점의 수가 0 또는 2라 하자.

- ① 홀수 차수를 갖는 꼭지점의 수가 0이라면 다시 정리 3.3.4에 의하여 G 는 오일러회로를 갖고 이것은 분명히 오일러경로이다.
- ② 홀수 차수를 갖는 꼭지점이 x, y 둘이라면 G 에 변 $\{x, y\}$ 를 첨가한 그래프 $G' = G + \{x, y\}$ 의 모든 꼭지점은 차수가 짝수이기 때문에 G' 은 오일러회로 Q 를 갖는다. 이제 Q 에서 변 $\{x, y\}$ 를 제거하여 만든 경로 $Q - \{x, y\}$ 는 꼭지점 x 에서 y 로 가는 G 의 오일러경로이다. □

문제 3.3.6

아래 그래프에는 오일러경로가 있는가? 또, 오일러회로는 있는가? 오일러회로가 없는 경우에는 적당한 변을 첨가하여 오일러회로가 존재하도록 만들어라.

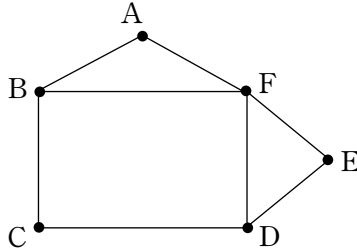


그림 3.3.18

정리 3.3.4에 의하여 연결그래프나 연결다중그래프에서 오일러회로의 존재 유무를 판단하기 위해서는 홀수 차수를 갖는 꼭지점의 유무만을 알아보면 된다. 이런 오일러회로 문제와는 달리 해밀턴회로의 존재 유무를 결정해 주는 일반적인 정리는 현재까지 알려져 있지 않다. 대체로 그래프의 꼭지점의 수가 커지면 해밀턴회로의 존재 유무를 판단하기는 쉽지 않다. 그러나 해밀턴회로에 관한 다음 분명한 사실을 알면 해밀턴회로의 존재 유무를 판단하는 데 커다란 도움이 된다.

정리 3.3.5

꼭지점의 수가 n 인 연결그래프 G 가 해밀턴회로 C 를 갖는다면 다음이 성립한다.

- (1) C 는 길이 n 인 회로이다.
- (2) 꼭지점에 근접한 변 중 오직 두 변만이 C 에 포함되어 있다. 따라서 차수가 2인 꼭지점에 근접한 변은 모두 C 에 포함된다.
- (3) C 의 일부분으로 만든 회로는 없다.
- (4) 꼭지점 v 가 C 에 포함되어 있다면 v 에 근접한 변 중에서 C 에 포함되어 있는 두 변을 제외한 나머지 변은 지워도 C 를 찾는 데에는 아무런 지장이 없다.

예제 3.3.8 다음 각 그래프에는 해밀턴회로가 있는지 판단하여라.

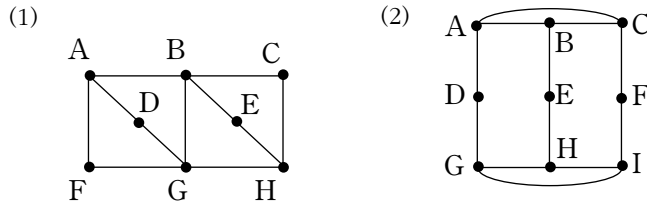


그림 3.3.19

풀이>> (1) 해밀턴회로 C 가 있다면 C 와 E 의 차수가 2이므로 C 는 꼭지점 C 나 E 에 근접한 변 $\{C, B\}, \{C, H\}, \{E, B\}, \{E, H\}$ 를 포함해야 한다.
따라서 $C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow C$ 는 C 의 일부분으로 이루어진 회로가 되며 이는 정리 3.3.5의 (3)에 모순이다. 그러므로 (1)의 그래프에는 해밀턴회로가 존재하지 않는다.

(2) C 가 주어진 그래프의 해밀턴회로라면 꼭지점 D, E, F 의 차수는 2이므로 C 는 이 꼭지점들과 근접한 변 $\{A, D\}, \{D, G\}, \{E, B\}, \{E, H\}, \{F, C\}, \{F, I\}$ 를 포함하고, 따라서 다음 그림 3.3.20의 그래프를 포함한다.

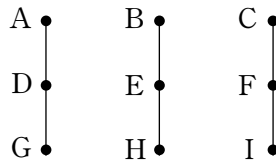


그림 3.3.20

C 는 연결되어 있으므로 그림 3.3.20의 세 부분을 잇는 변이 존재해야 한다. 이 변에 따라 다음 몇 경우로 나누어 생각하여 보자.

① **경우 1 :** C 가 $y = \{A, C\}$ 와 $w = \{G, I\}$ 를 포함할 경우 (그림 3.3.21 참조)
 C 의 일부분인 $A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$ 의 회로가 있으므로 정리 3.3.5의 (3)에 모순이다.

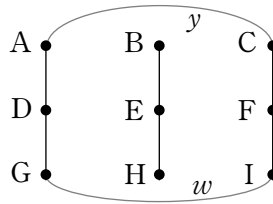


그림 3.3.21

- ② 경우 2 : C 가 $y=\{A, C\}$ 와 $z=\{G, H\}$ 를 포함할 경우 (그림 3.3.22 참조)
 변 $\{A, B\}, \{B, C\}, \{G, I\}, \{H, I\}$ 가운데 한 변이라도 C 에 있으면 C 의
 일부가 회로를 이루므로 변 $\{A, B\}, \{B, C\}, \{G, I\}, \{H, I\}$ 는 C 의 변이 아
 니며, 따라서 C 는 해밀턴회로가 될 수 없다.

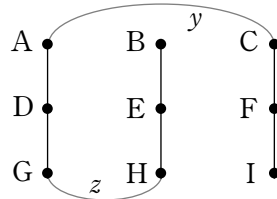


그림 3.3.22

- ③ 경우 3 : 또 다른 경우에도 ①이나 ②와 같은 방법으로 해밀턴회로가 존
 재하지 않음을 보일 수 있다.

따라서 앞의 그래프 (2)에는 해밀턴회로가 존재하지 않음을 알 수 있다. $\square$

문제 3.3.7

다음 그래프에서 해밀턴회로가 있는지 판단하여라.

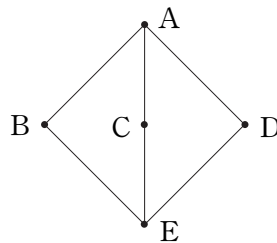


그림 3.3.23

꼭지점의 수가 3 이상인 완전그래프에는 항상 해밀턴회로가 존재한다는 사실을 이용하여 다음과 같은 해밀턴회로에 관한 정리를 증명하여 보자.

정리 3.3.6

n 개의 꼭지점을 갖고 있는 연결그래프에서 인접하지 않는 임의의 두 꼭지점의 차수의 합이 n 이상이면 해밀턴회로가 존재한다. (단, $n \geq 3$)

【증명】 모순을 얻기 위하여 위의 정리가 참이 아니라고 하자. 그러면 위의 가정을 만족하며 해밀턴회로를 갖지 않는 그래프가 있다. 그런 그래프 중에서 변의 수가 가장 많은 그래프를 G 라 하자. 그러면 G 는 완전그래프가 아니므로 인접하지 않는 두 꼭지점 x, y 가 있고, G 에 변 $\{x, y\}$ 를 첨가한 그래프 $H = G + \{x, y\}$ 는 해밀턴회로 C 를 갖는다. 이 회로 C 는 변 $\{x, y\}$ 를 포함하고 있으며 $C - \{x, y\}$ 는 시작점이 x 이고 끝점이 y 인 해밀턴경로 $P : x = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n = y$ 가 된다.

그래프 G 에서 꼭지점 $v_i (2 \leq i \leq n-1)$ 가 x 와 인접하면 꼭지점 v_{i-1} 는 y 와 인접하지 않는다. 왜냐하면 v_{i-1} 과 y 가 인접한다면 다음 그림 3.3.24에서 보듯이 다음과 같은 회로 Q

$$Q : x = v_1 \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_n = y \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_{i-2} \rightarrow \cdots \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$$

는 G 의 해밀턴회로가 되고 이는 가정에 모순이기 때문이다.

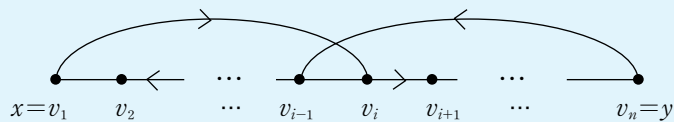


그림 3.3.24

따라서 G 의 꼭지점 중에서 적어도 $d(x)$ 개는 y 와 인접하지 않으며 y 의 차수 $d(y)$ 는 많아야 $(n-1) - d(x)$ 임을 알 수 있고, $d(x) + d(y) < n$ 이 되어 가정에 모순이다. 따라서 위의 정리의 조건을 만족하는 그래프에는 항상 해밀턴회로가 존재한다. □

예제 3.3.9 다음 그래프에는 해밀턴회로가 있는지 판단하여라.

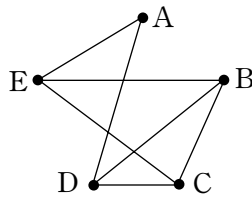


그림 3.3.25

풀이>> 위의 그래프에서 인접하지 않는 두 꼭지점 A와 B, A와 C, D와 E의 차수의 합은 각각 5, 5, 6이고 이는 그래프의 꼭지점의 수 5보다 크거나 같다. 그러므로 정리 3.3.6에 의하여 해밀턴 회로가 존재한다.

실제로 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$ 는 위 그래프의 해밀턴회로이다. □

문제 3.3.8

다음 그래프에서 해밀턴회로가 있는지 판단하여라.

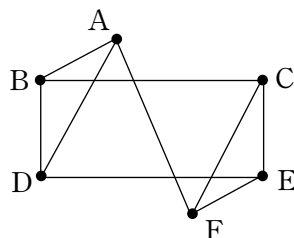
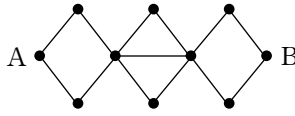


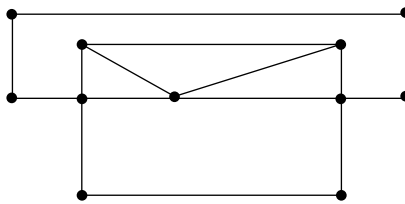
그림 3.3.26

>> 연습문제 3.3

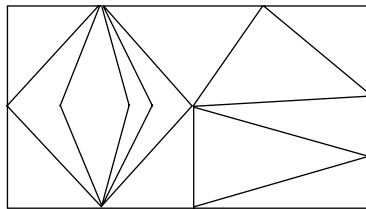
1 아래 그래프에서 꼭지점 A에서 B로 가는 경로의 총 개수를 구하여라.



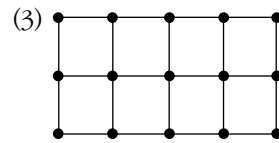
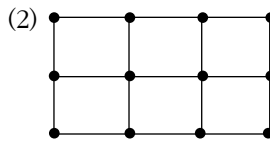
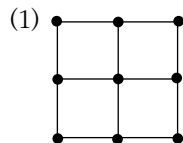
2 다음 그래프에서 오일러회로가 있는가? 또 오일러경로는 존재하는가?



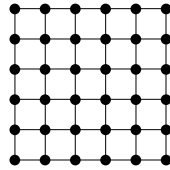
3 직사각형 모양의 철판을 용접기를 이용하여 아래 그림과 같이 조각을 내려고 한다. 용접기를 철판에서 떼지 않고 모든 조각을 잘라낼 수 있는지 살펴보아라.



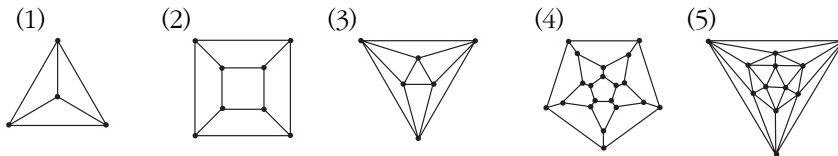
4 다음 그래프에서 해밀턴회로를 찾아라.



5 다음 그래프에서 해밀턴회로를 찾아라.



6 다음 그림은 정다면체를 평면그래프로 나타낸 것이다. 각각의 그래프에서 오일러 회로와 해밀턴회로를 찾아라.



7 꼭지점이 3 이상인 완전그래프에는 항상 해밀턴회로가 존재함을 보여라.

8 완전이분그래프 $K_{n,n}$ 에는 항상 해밀턴회로가 존재함을 보여라. (단, $n \geq 2$)

9 완전이분그래프 $K_{m,n}$ 에는 해밀턴회로가 없음을 보여라. (단, $m \neq n$)

10 n 개의 꼭지점을 갖는 단순그래프에서 인접하지 않는 임의의 두 꼭지점의 차수의 합이 $(n-1)$ 이상이면 그 그래프는 연결그래프임을 보여라.

11 오일러회로는 존재하지만 해밀턴회로는 존재하지 않는 연결그래프를 두 개 이상 찾아라.

12 해밀턴회로는 존재하지만 오일러회로는 존재하지 않는 연결그래프를 두 개 이상 찾아라.

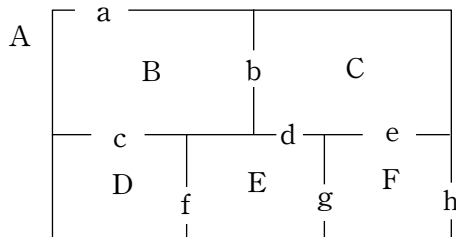
13 G 를 오일러회로가 있는 그래프라고 하자.

- (1) G 에서 임의의 한 변을 제거하고 남은 그래프는 연결그래프인가?
- (2) G 에서 임의의 한 변을 제거하고 남은 그래프에도 오일러회로가 존재하는가?

14 그래프 G 가 오일러회로가 있으면 G 의 변의 집합은 서로 소인 몇 개의 회로로 분해됨을 보여라. (공유하는 변이 없는 두 회로를 서로 소라고 한다.)

15 n 개의 꼭지점을 갖고 모든 꼭지점의 차수가 적어도 $\frac{n}{2}$ 인 연결그래프에는 해밀턴회로가 있음을 보여라.

16 다음 그림은 어느 집의 방과 방 사이의 문을 나타낸 것이다. A, B, C, D, E, F를 꼭지점으로 하고 두 꼭지점 사이에 문이 있으면 그 두 꼭지점이 인접하도록 그래프를 그려라. 한 지점에서 출발하여 모든 문을 오직 한 번 통과한 후 출발점으로 되돌아 올 수 있는가? 또 한 지점에서 출발하여 모든 지점을 오직 한 번 통과한 후 출발점으로 되돌아 올 수 있는가?



17 그래프 G 가 이분그래프가 되기 위한 필요충분조건은 G 의 모든 회로의 길이가 짝수임을 보여라.

18 완전그래프 K_n 에서 서로 다른 해밀턴회로의 개수를 구하여라. (단, $n \geq 2$)

19 어떤 연결그래프 G 에서 한 꼭지점과, 그것에 인접한 모든 변을 제거하였더니 남은 그래프는 연결되어 있지 않았다. 그래프 G 에는 해밀턴회로가 존재하지 않음을 보여라.

20 n 개의 꼭지점을 갖는 연결그래프 G 에서 인접하지 않는 두 꼭지점 x, y 의 차수의 합이 n 이상이라고 하자.

- (1) G 에 해밀턴회로가 있으면 $G + \{x, y\}$ 에도 해밀턴회로가 있음을 보여라.
- (2) $G + \{x, y\}$ 에 해밀턴회로가 있으면 G 에도 해밀턴회로가 있음을 보여라.

제4절 평면그래프

각종 전자제품의 회로도는 그 제품에 사용되는 반도체, 저항, 스위치, 전구 등의 연결 상태를 그래프로 나타낸 것이다. 이 그래프의 변이 꼭지점이 아닌 곳에서 서로 교차하면 제품에서는 합선이 일어나기 때문에 이를 막기 위한 추가적인 조치가 필요하며 그 만큼 일손이나 비용도 더 들게 된다. 이 절에서는 이처럼 변이 서로 교차하지 않도록 그래프를 그릴 수 있는가 하는 문제에 대하여 살펴보기로 하자.

예제 3.4.1 아래 그림과 같이 세 집과 세 우물이 있다. 각 집에서 교차하지 않고 세 우물에 이르는 길을 찾아라.

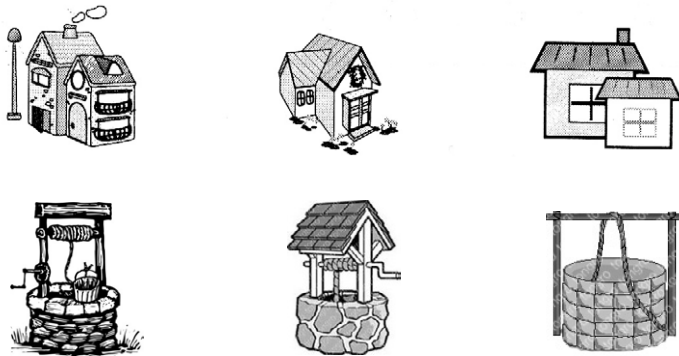


그림 3.4.1

풀이>> 위의 집과 우물을 각각 꼭지점 A, B, C, D, E, F로 나타내고 길을 변으로 나타내면 다음 그림 3.4.2와 같으며 주어진 문제는 이 그래프를 변이 서로 교차하지 않도록 다시 그리는 문제와 같다.

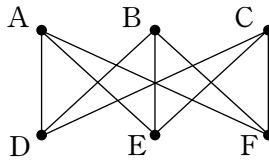


그림 3.4.2

이제 가능한 한 변이 교차하지 않도록 위의 그래프를 다시 그려보자.

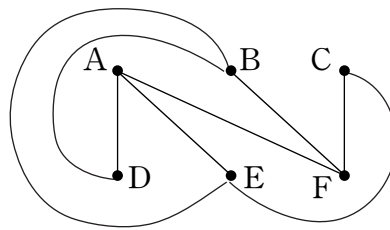


그림 3.4.3

위 그림에서 꼭지점 C와 D를 생각하여 보자. 변 $\{C, D\}$ 를 만들기 위해 C와 D를 이어야 하나 C와 D는 각각 꼭지점 B, E, A, F, B로 이루어진 단일폐곡선의 외부와 내부에 있는 점이므로 변을 교차하지 않고서는 그 두 점을 이을 수 없다. 따라서 각 집에서 길을 교차하지 않고 세 우물에 이르는 방법은 없다. $\square$

문제 3.4.1

다음 그래프를 변이 서로 교차되지 않도록 다시 그려라.

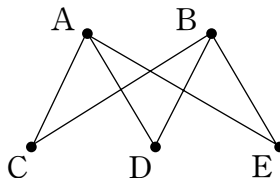


그림 3.4.4

정의 3.4.1 변이 서로 교차하지 않도록 그래프 G 를 평면에 그릴 수 있으면 G 를 **평면그래프**라고 한다. 한편 평면그래프에서 교차하지 않는 변에 의하여 나누어지는 영역을 그 평면그래프의 **면**이라 한다.

예를 들어 그림 3.4.4의 그래프는 평면그래프이지만, 그림 3.4.2의 완전이분그래프 $K_{3,3}$ 은 평면그래프가 아니다.

예제 3.4.2 다음 그래프는 평면그래프인가? 평면그래프이면 변이 서로 교차하지 않게 평면에 다시 그리고 그 그래프의 꼭지점의 개수, 변의 개수, 면의 개수를 구하여라.

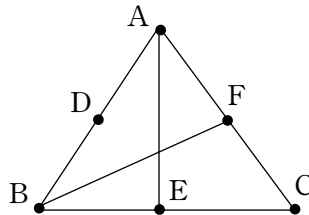


그림 3.4.5

풀이>> 그림 3.4.5의 그래프는 그림 3.4.6과 같이 변이 서로 교차하지 않게 평면에 그릴 수 있으므로 평면그래프이다.

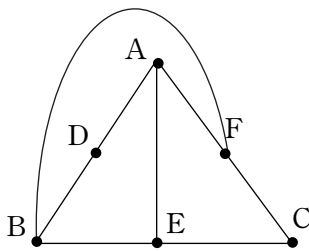


그림 3.4.6

여기서

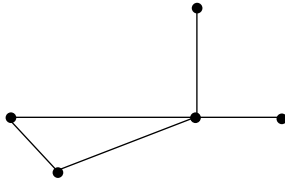
꼭지점의 수=6,
변의 개수=8,
면의 개수=4

이다. 특히 밖의 닫혀있지 않은 영역도 하나의 면임에 주의한다. □

문제 3.4.2

다음 평면그래프에서 꼭지점의 수를 v , 변의 수를 e , 면의 수를 f 라 할 때 v, e, f 를 각각 구하고 그 관계를 유추하여라.

(1)



(2)

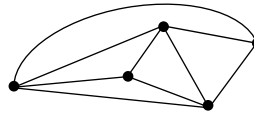


그림 3.4.7

정리 3.4.2 (오일러공식)

연결된 평면그래프 G 에서 꼭지점의 수를 v , 변의 수를 e , 면의 수를 f 라 하면

$$v - e + f = 2$$

이다.

【증명】 (변의 수 e 에 대한 수학적귀납법)

- (i) $e=1$ 이면 $v=2, f=1$ 이며 $v-e+f=2$ 이다.
- (ii) 변의 수가 n 보다 작은 모든 연결된 평면그래프에서 $v-e+f=2$ 라고 하자.
- (iii) 이제 G 를 n 개의 변을 갖는 연결된 평면그래프라고 하자.

① G 안에 회로가 있는 경우 (그림 3.4.8 참조)

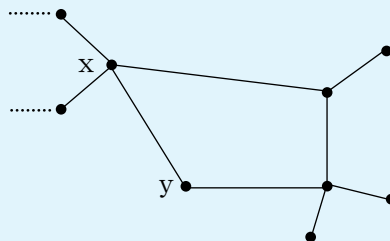


그림 3.4.8

G 의 회로의 한 변 $\{x, y\}$ 를 제거하고 남은 그래프 $G' = G - \{x, y\}$ 는 여전히 연결된 평면그래프이다. 그래프 G' 의 꼭지점의 수, 변의 수, 면의 수를 각각 v', e', f' 이라 하면

$$e' = e - 1 < n$$

$$v' = v$$

$$f' = f - 1$$

이므로 (ii)에 의해 $v' - e' + f' = 2$ 이고, 따라서

$$v - e + f = v' - (e' + 1) + (f' + 1) = 2$$

이다.

② G 안에 회로가 없는 경우 (그림 3.4.9 참조)

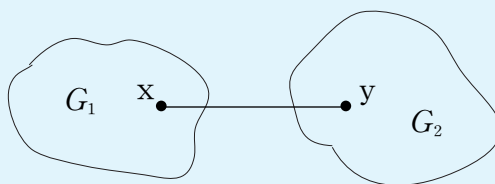


그림 3.4.9

G 의 임의의 한 변 $\{x, y\}$ 를 제거하면 남은 그래프 $G' = G - \{x, y\}$ 는 두 개의 연결된 평면그래프 G_1, G_2 로 나뉜다.

G_1 의 꼭지점의 수, 변의 수, 면의 수를 각각 v_1, e_1, f_1 이라 하고 G_2 의 꼭지점의 수, 변의 수, 면의 수를 각각 v_2, e_2, f_2 라 하자. G_1, G_2 의 변의 수는 G 의 변의 수보다 작으므로 (ii)에 의하여

$$v_1 - e_1 + f_1 = 2,$$

$$v_2 - e_2 + f_2 = 2$$

이다. 그래프 G 는 G' 보다 변이 하나 많고 꼭지점 수는 같으며 G 와 G_1, G_2 에는 회로가 없으므로 $f = f_1 = f_2 = 1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2, \\ e &= e_1 + e_2 + 1, \\ f &= f_1 + f_2 - 1 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} v - e + f &= (v_1 + v_2) - (e_1 + e_2 + 1) + (f_1 + f_2 - 1) \\ &= (v_1 - e_1 + f_1) + (v_2 - e_2 + f_2) - 2 = 2 \end{aligned}$$

이다.

그러므로 수학적귀납법에 의해 모든 연결된 평면그래프 G 에서 $v - e + f = 2$ 이다. $\square$

예제 3.4.3 꼭지점의 개수가 10이고 각 꼭지점의 차수가 3인 연결된 평면그래프의 면의 개수를 구하여라.

풀이>> 꼭지점의 차수의 합이 $10 \times 3 = 30$ 이므로 정리 3.1.2에 의하여 변의 수는 15이다. 따라서 오일러정리에 의하여 $10 - 15 + f = 2$ 이고 $f = 7$ 이다. $\square$

문제 3.4.3

다음 그림과 같이 정다면체의 한 면을 크게 늘리고 나머지 면을 늘려진 면으로 누르면 평면그래프가 된다. 꼭지점의 수가 12인 정이십면체의 변의 개수를 구하여라.

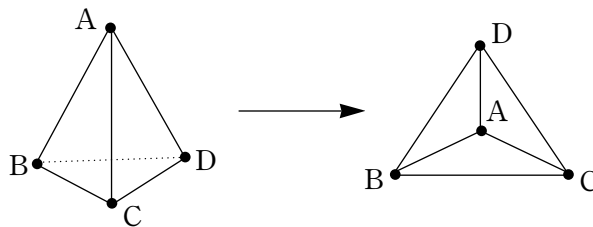


그림 3.4.10

정리 3.4.3

연결된 평면그래프 G 에서 꼭지점의 개수를 v , 변의 개수를 e 라 하면

$$e \leq 3v - 6$$

이다. (단, $v \geq 3$)

【증명】 G 의 면의 개수를 f 라 하면 오일러공식에서 $f = 2 + e - v$ 이다. 한편, 한 면은 적어도 세 변을 포함하고, 한 변은 두 면에서 이용되므로 $3f \leq 2e$ 이다. 따라서

$$3f = 3(2 + e - v) \leq 2e$$

이다. 곧,

$$e \leq 3v - 6$$

이다. □

예제 3.4.4 다음의 완전그래프 K_5 는 평면그래프가 아님을 보여라.

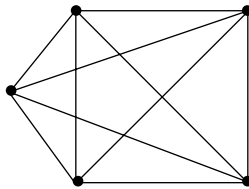


그림 3.4.11

풀이>> K_5 가 평면그래프라면 $e \leq 3v - 6$ 이다. 그러나 K_5 에서 $v = 5, e = 10$ 이고

$$3v - 6 = 9 < 10 = e$$

이므로 K_5 는 평면그래프가 아니다. □

문제 3.4.4

다음 그래프는 평면그래프인가?

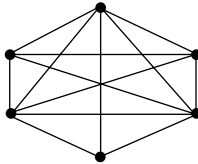


그림 3.4.12

예제 3.4.5 G 를 길이 3인 회로를 포함하지 않는 연결된 평면그래프라 하자.

꼭지점의 개수를 v , 변의 개수를 e 라 하면

$$e \leq 2v - 4$$

임을 보여라. (단, $v \geq 4$)

풀이>> G 의 면의 개수를 f 라 하면 오일러공식에서 $f = 2 + e - v$ 이다. 한편, 길이 3인 회로를 포함하지 않으므로 한 면은 적어도 네 변을 포함하고, 한 변은 두 면에서 이용되므로 $4f \leq 2e$ 이다. 따라서

$$4f = 4(2 + e - v) \leq 2e$$

이므로

$$e \leq 2v - 4$$

이다. □

문제 3.4.5

완전이분그래프 $K_{3,3}$ 는 평면그래프가 아님을 보여라.

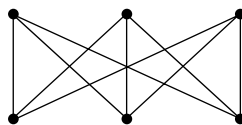


그림 3.4.13

정리 3.4.4

평면그래프 G 에는 차수가 5 이하인 꼭지점이 적어도 하나 있다.

【증명】 G 의 꼭지점과 변의 개수를 각각 v 와 e 라 하고 모든 꼭지점의 차수가 6 이상이라 하자. 그러면 차수의 합은 적어도 $6v$ 이고 정리 3.1.2에 의하여 $2e \geq 6v$, 즉 $e \geq 3v$ 이다. 이것은 정리 3.4.3의 $e \leq 3v - 6$ 에 모순이다. 따라서 모든 평면그래프에는 차수가 5 이하인 꼭지점이 적어도 하나 있다. $\square$

정의 3.4.5 그래프 $G(V, E)$ 의 변에 꼭지점을 첨가하고, 그에 따라 분할된 모든 변을 첨가한 그래프를 G 의 **부분분할그래프**라 한다.

예를 들어 아래 오른쪽 그래프는 왼쪽그래프의 부분분할그래프이다.

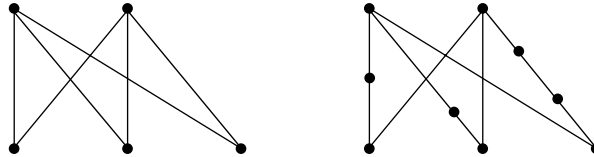


그림 3.4.14

예제 3.4.6 다음 그래프는 완전이분그래프 $K_{3,3}$ 의 부분분할그래프를 포함하고 있음을 보여라.

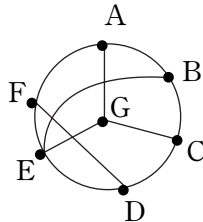


그림 3.4.15

풀이>> 앞의 그림 3.4.15의 그래프를 다시 그리면 아래 그림의 왼쪽 그래프와 같으며 그것은 오른쪽 $K_{3,3}$ 의 부분분할그래프이다.

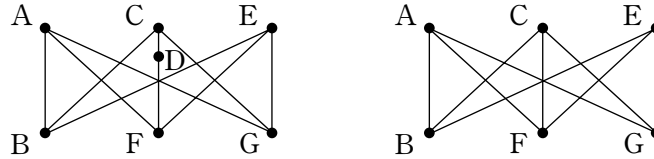


그림 3.4.16

□

문제 3.4.6

다음 그래프는 완전그래프 $K_{3,3}$ 의 부분분할그래프를 포함하고 있음을 보여라.

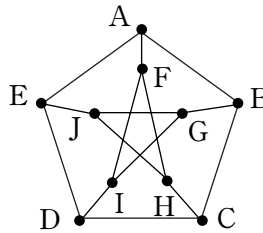


그림 3.4.17

그래프의 꼭지점과 변이 많아지면 주어진 그래프가 평면그래프인지 아닌지를 판단하는 것은 쉽지 않다. 이 책의 수준을 넘어 여기서 증명할 수는 없지만 다음 정리를 이용하면 보다 쉽게 평면그래프인지 아닌지를 판단할 수 있다.

정리 3.4.6 (Kuratowski 정리)

그래프 G 가 평면그래프가 아닐 필요충분조건은 G 가 K_5 나 $K_{3,3}$ 의 부분분할그래프와 동형인 부분그래프를 포함하는 것이다.

□

예제 3.4.7 다음 그래프 G 는 평면그래프인가?

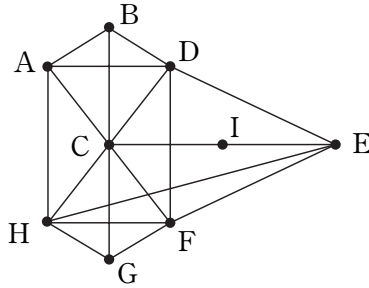


그림 3.4.18

풀이>> 아래 그림의 왼쪽 그래프는 G 의 부분그래프이고 이것은 그림에서 보듯이 오른쪽에 있는 완전이분그래프 $K_{3,3}$ 의 부분분할그래프이다. 따라서 Kuratowski 정리에 의하여 G 는 평면그래프가 아니다.

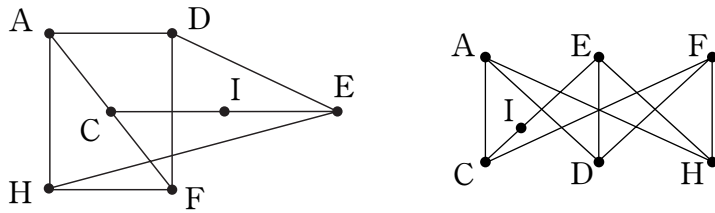


그림 3.4.19

□

문제 3.4.7

다음 그래프 G 는 평면그래프인가?

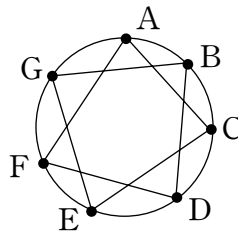


그림 3.4.20

정의 3.4.7 각 면이 모두 합동인 정다각형이고 각 꼭지점에 모이는 면의 개수가 같은 다면체를 **정다면체**라고 한다.

정리 3.4.8

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류 뿐이다.

【증명】 정다면체 P 의 꼭지점, 변, 면의 개수를 각각 v, e, f 라 하자. 또 한 꼭지점에 모인 면의 개수를 r , 정다면체의 한 면의 모양을 정 n 각형이라 하자.

한 꼭지점에 적어도 세 면이 모이고 한 꼭지점에 모인 각의 합이 360° 보다 작아야 한다.

결국 정다면체의 한 면은 정삼각형, 정사각형, 정오각형 중의 하나이며 각 꼭지점에 모이는 면의 개수 r 는 많아야 5이다. 따라서 다면체가 정다면체이기 위해서는 다음 다섯 가지 경우 밖에 없다.

① $r=3, n=3$ 인 경우

$3f=2e, 3v=2e, v-e+f=2$ 에서 $f=4$ 이므로 P 는 정4면체이다.

② $r=3, n=4$ 인 경우

$4f=2e, 3v=2e, v-e+f=2$ 에서 $f=6$ 이므로 P 는 정6면체이다.

③ $r=3, n=5$ 인 경우

$5f=2e, 3v=2e, v-e+f=2$ 에서 $f=12$ 이므로 P 는 정12면체이다.

④ $r=4, n=3$ 인 경우

$3f=2e, 4v=2e, v-e+f=2$ 에서 $f=8$ 이므로 P 는 정8면체이다.

⑤ $r=5, n=3$ 인 경우

$3f=2e, 5v=2e, v-e+f=2$ 에서 $f=20$ 이므로 P 는 정20면체이다.

따라서 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 다섯 종류뿐이다. □

정리 3.4.8의 증명에서 얻은 결과를 간단하게 표로 나타내면 다음과 같다.

정다면체	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
면의 모양	정삼각형	정사각형	정삼각형	정오각형	정삼각형
면의 개수	4	6	8	12	20
꼭지점의 개수	4	8	6	20	12
모서리의 개수	6	12	12	30	30
한 꼭지점에서 만나는 면의 개수	3	3	4	3	5

표 3.4.1

그림 3.4.21에서 (a)는 다섯 종류의 정다면체를 나타낸 것이고, (b)는 정다면체의 한 면을 크게 늘리고 나머지 면을 늘려진 면에 눌러 평면그래프로 나타낸 것이다.

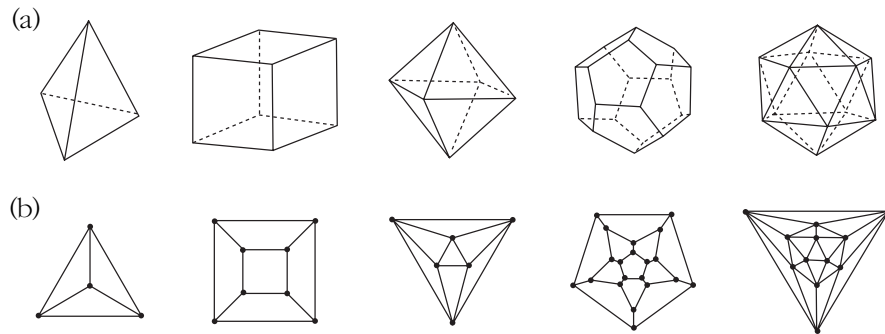


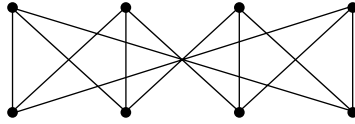
그림 3.4.21

문제 3.4.8

현재 월드컵에서 사용되는 축구공은 정이십면체의 각 꼭지점을 같은 모양으로 둘러내어 오각형을 만든 것이다. 이 다면체의 꼭지점, 변, 면의 개수를 구하여라.

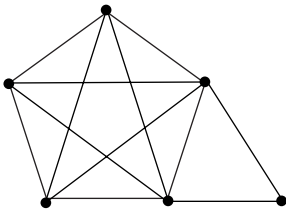
>> 연습문제 3.4

1 다음 그래프를 변이 교차하지 않도록 다시 그려라.

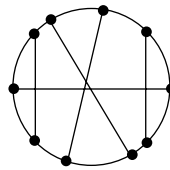


2 아래 그래프는 평면그래프가 아님을 보여라.

(1)



(2)



3 각 꼭지점의 차수가 모두 4이고 변의 개수가 10인 연결된 평면그래프에서 꼭지점의 개수를 구하여라.

4 꼭지점의 개수와 변의 개수가 같은 평면그래프를 찾아라.

5 차수가 5 미만인 꼭지점이 없는 평면그래프를 찾아라.

6 완전그래프 K_6 에서 두 변을 제거하여 얻어진 그래프는 평면그래프인가?

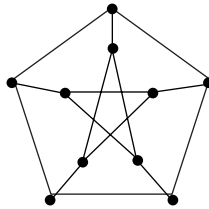
7 다음 물음에 답하라.

- (1) 평면그래프 G 를 길이가 k 미만인 회로를 포함하지 않는 연결그래프라고 하자. G 의 꼭지점의 개수를 v , 변의 개수를 e 라 하면

$$e \leq \frac{(v-2)k}{k-2}$$

임을 보여라.

- (2) 위 (1)을 이용하여 아래 그래프는 평면그래프가 아님을 보여라.



8 각 꼭지점의 차수가 적어도 3인 연결 평면그래프 G 에는 5개 이하의 변을 포함하는 면이 적어도 하나 있음을 보여라.

9 꼭지점의 개수가 11 이하인 연결 평면그래프에는 차수가 많아야 4인 꼭지점이 적어도 하나 있음을 보여라.

10 평면그래프 G 는 서로 만나지 않는 k 개의 연결된 부분그래프 $G_1, G_2, \dots, G_k$ 로 이루어져 있다. G 의 꼭지점의 수를 v , 변의 수를 e , 면의 수를 f 라 할 때 $v - e + f$ 의 값을 구하여라.

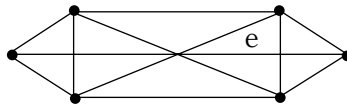
11 n 개의 꼭지점을 갖는 연결 평면그래프에 대하여 다음을 보여라.

- (1) $n \geq 2$ 이면 차수가 5 이하인 꼭지점이 적어도 2개 있다.
 (2) $n \geq 5$ 이면 차수가 5 이하인 꼭지점이 적어도 4개 있다.

12 G 가 n 개의 꼭지점을 갖는 연결 평면그래프라면 G 는 적어도 $n-1$ 개의 변을 갖고 있음을 보여라.

13 평면그래프의 꼭지점의 평균 차수는 6보다 작음을 보여라.

14 e 를 그래프 G 의 한 변이라 하자. 그래프 G 가 평면그래프이면 G/e 도 평면그래프이다. 이 사실을 이용하여 다음 그래프가 평면그래프가 아님을 보여라.



제5절 수형도

어떤 도시에 되도록 적은 비용으로 지하철을 건설하려고 한다. 필요한 지역에 역을 만들어 각 역을 철도로 연결하고, 연결된 철로에는 회로가 없어야 건설 비용을 줄일 수 있다. 이처럼 회로가 없는 연결그래프를 **수형도**라 한다. 실제로 수형도는 수학은 물론 화학이나 생물학 등의 여러 분야에서 자주 이용되며, 특히 컴퓨터공학에서는 정보를 체계적으로 탐색하고 자료를 분류하는 프로그램에서 수형도를 이용한다. 이 절에서는 수형도의 기본적인 성질과 그 활용방법에 대하여 살펴보자.

예제 3.5.1 아래 그림은 수소와 탄소로 이루어진 탄화수소를 나타낸 것으로 탄소와 수소를 꼭지점으로 하는 그래프로 생각하면 탄소의 차수는 4이고, 수소의 차수는 1인 회로가 없는 연결그래프이다. 각 그래프의 꼭지점과 변의 수를 구하고 이를 이용하여 꼭지점 개수 v 와 변의 개수 e 사이의 관계를 유추하여라.

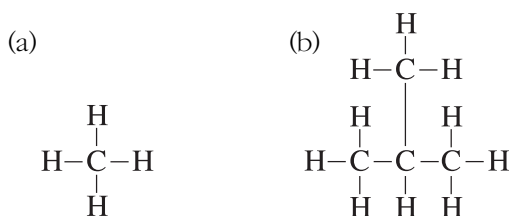


그림 3.5.1

풀이>> (a)에서 꼭지점의 개수 $v=5$, 변의 개수 $e=4$ 이고 (b)에서 꼭지점의 개수 $v=14$, 변의 개수 $e=13$ 이다. 따라서 $e=v-1$ 이다. □

문제 3.5.1

회로가 없는 연결 평면그래프에서 꼭지점의 개수 v 와 변의 개수 e 사이의 관계식을 오일러 공식을 써서 구하여라.

정의 3.5.1 회로를 갖지 않는 연결그래프를 수형도(tree)라 한다.

예를 들어 아래 그림에서 (a)는 회로가 없는 연결그래프이므로 수형도이지만, (b)는 연결되어 있지 않고, 또 (c)는 회로를 가지므로 (b)와 (c)는 수형도가 아니다.

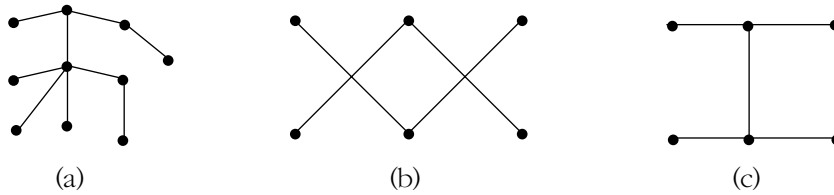


그림 3.5.2

예제 3.5.2 6개의 꼭지점을 가지며 동형이 아닌 수형도를 모두 찾아라.

풀이>> 꼭지점의 수가 6이며 서로 동형이 아닌 수형도는 다음과 같이 여섯 가지 종류가 있다.

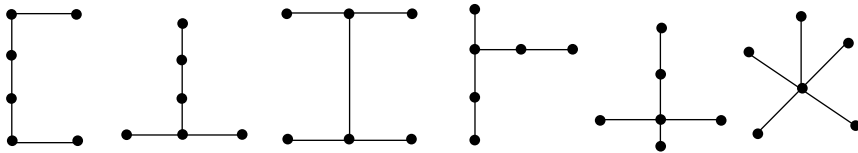


그림 3.5.3



문제 3.5.2

5개의 꼭지점을 갖는 동형이 아닌 수형도를 모두 찾아라.

정리 3.5.2

수형도 G 에서 꼭지점의 개수를 v , 변의 개수를 e 라 하면 다음이 성립한다.

$$e = v - 1$$

【증명】(꼭지점 개수 v 에 관한 수학적귀납법)

- (i) $v=1$ 이면 $e=0$ 이므로 $e=v-1$ 이다.
- (ii) 꼭지점의 개수가 n 보다 작은 모든 수형도에서 $e=v-1$ 이라고 하자.
- (iii) 이제 G 를 꼭지점의 개수가 n 인 수형도라고 하자. G 에서 임의의 변 $\{x, y\}$ 를 제거하면 남은 그래프 $G - \{x, y\}$ 는 그림 3.5.4처럼 두 개의 수형도 G_1, G_2 로 분리된다.

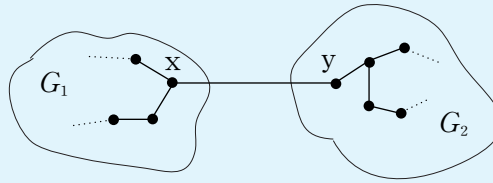


그림 3.5.4

그래프 G, G_1, G_2 의 꼭지점의 개수를 각각

$$v(G), v(G_1), v(G_2)$$

라 하고 변의 개수를 각각

$$e(G), e(G_1), e(G_2)$$

라 하자. G_1, G_2 의 꼭지점 개수는 모두 n 보다 작으므로 (ii)에 의하여

$$e(G_1) = v(G_1) - 1,$$

$$e(G_2) = v(G_2) - 1$$

이다.

이제 $v(G) = v(G_1) + v(G_2)$ 이므로

$$\begin{aligned} e(G) &= e(G_1) + e(G_2) + 1 \\ &= (v(G_1) - 1) + (v(G_2) - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$=v(G_1)+v(G_2)-1=v(G)-1$$

이다.

그러므로 수학적귀납법에 의하여 모든 수형도에서 $e=v-1$ 이다. $\square$

예제 3.5.3 모든 탄화수소의 그래프는 수형도이다. 어떤 탄화수소에 포함된 탄소 원자의 수가 k 라면 수소 원자의 수 m 은 얼마인가?

풀이>> 탄화수소를 나타내는 그래프는 수형도이므로 변의 개수는 $k+m-1$ 이다. 한편, 탄소의 차수는 4이고 수소의 차수는 1이므로 모든 꼭지점의 차수의 합은 $4k+m$ 이다. 정리 3.1.2에 의하여 꼭지점의 차수의 합은 변의 개수의 2배이므로 $4k+m=2(k+m-1)$ 이고 $m=2k+2$ 이다. $\square$

문제 3.5.3

완전그래프 K_n 의 변을 지워 수형도를 만들려고 한다. 몇 개의 변을 지워야 하는가? (단, $n \geq 3$)

예제 3.5.4 두 개 이상의 꼭지점을 갖는 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 적어도 둘 이상 있음을 보여라.

풀이>> 수형도의 꼭지점의 개수를 v 라고 하면 변의 개수는 $v-1$ 이다. 따라서 차수의 합은 $2(v-1)$ 이다. 만일 모든 꼭지점의 차수가 2 이상이면 차수의 합은 $2v$ 이상이 되어 모순이므로 차수가 1인 꼭지점이 반드시 존재해야 한다. 차수가 1인 꼭지점이 오직 하나라면 차수의 합은 $2(v-1)+1$ 이상이 되어 역시 모순이다. 그러므로 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 적어도 둘 이상 존재한다. $\square$

문제 3.5.4

n 개의 꼭지점을 갖는 연결그래프 G 의 변의 개수 e 의 범위를 구하여라.

정리 3.5.3

G 를 n 개의 꼭지점을 갖는 연결그래프라 하자. 그러면 다음 명제는 모두 동치이다.

- (1) G 는 수형도이다.
- (2) 임의의 두 꼭지점 u, v 에 대하여 u 에서 v 로 가는 유일한 경로가 있다.
- (3) G 에서 임의의 한 변을 제거하면 남은 그래프는 연결그래프가 아니다.
- (4) G 는 $n-1$ 개의 변을 갖고 있다.

【증명】

(1) $\Rightarrow$ (2) G 를 수형도라 하고 u, v 를 G 의 두 꼭지점이라 하자. G 는 연결그래프이므로 u 에서 v 로 가는 경로는 적어도 하나 존재한다. 만약 P_1, P_2 가 아래와 같이 u 에서 v 로 가는 서로 다른 경로라 하자.

$$P_1 : u = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{n-1} \rightarrow v_n \rightarrow v$$

$$P_2 : u = w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \cdots \rightarrow w_{m-1} \rightarrow w_m \rightarrow v$$

그러면 P_1 과 P_2 를 합하면 아래와 같이 회로 G 를 만들 수 있으므로 G 는 수형도가 아니다. (그림 3.5.5 참조)

따라서 꼭지점 u 에서 v 로 가는 경로는 유일하다.

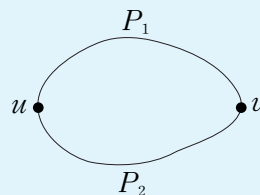


그림 3.5.5

(2) $\Rightarrow$ (3) G 에서 임의의 한 변 $\{x, y\}$ 를 제거한 그래프 $G' = G - \{x, y\}$ 가 연결그래프라면 G' 에는 x 에서 y 로 가는 경로 P 가 있다. 따라서 경로 P 와 x

$\rightarrow y$ 는 그래프 G 의 x 에서 y 로 가는 서로 다른 경로이다. 그러므로 G 에서 임의의 한 변을 제거하면 남은 그래프는 연결그래프가 아니다.

(3) $\Rightarrow$ (1) (3)의 성질을 만족하는 G 가 수형도가 아니라면 G 에는 회로가 있고 회로의 한 변을 제거해도 여전히 연결그래프이므로 (3)에 모순이다. 따라서 (3)의 성질을 만족하는 연결그래프는 수형도이다.

(1) $\Rightarrow$ (4) 정리 3.5.2

(4) $\Rightarrow$ (1) G 가 $n-1$ 개의 변을 갖는다고 하자. 만약 G 가 수형도가 아니라면 G 에는 적어도 하나의 회로가 존재한다. 이제 G 에서 변을 제거하여 회로가 더 이상 존재하지 않는 연결그래프를 만들면 남은 그래프는 변의 수가 $n-1$ 보다 작은 수형도가 되어 정리 3.5.2에 모순이다. 따라서 G 는 수형도이다. $\square$

예제 3.5.5 수형도 G 에 임의의 한 변 $\{x, y\}$ 를 첨가하여 만들어진 그래프 $G+\{x, y\}$ 에는 단 하나의 회로가 있음을 보여라.

【증명】 ① 존재성

G 가 n 개의 꼭지점을 갖는 수형도라면 G 는 $n-1$ 개의 변을 갖고 있다. 만약 $G+\{x, y\}$ 에 회로가 없다면 $G+\{x, y\}$ 는 꼭지점과 변의 수가 모두 n 인 수형도가 되어 모순이다. 그러므로 $G+\{x, y\}$ 는 적어도 하나의 회로를 갖고 있다.

② 유일성

$G+\{x, y\}$ 에 서로 다른 두 개의 회로 C_1, C_2 가 있다고 하자. C_1, C_2 는 모두 $\{x, y\}$ 를 포함하므로 C_1, C_2 에서 각각 변 $\{x, y\}$ 를 제거한 두 그래프

$$P_1 : C_1 - \{x, y\}$$

$$P_2 : C_2 - \{x, y\}$$

는 G 에서 x 에서 y 로 가는 서로 다른 두 경로가 되어 정리 3.5.3에 의해 모순이다. 따라서 $G+\{x, y\}$ 에는 단 하나의 회로가 있다. $\square$

문제 3.5.5

n 개의 꼭지점으로 이루어진 수형도가 갖는 서로 다른 경로의 총 개수를 구하여라.

정의 3.5.4 그래프 $G(V, E)$ 의 부분 그래프 $G'(V', E')$ 이 다음의 두 조건을 만족할 때, G' 을 G 의 **생성수형도**라고 한다.

(i) $V' = V$

(ii) G' 는 수형도

즉, 그래프 G 의 생성수형도는 G 의 모든 꼭지점과 G 의 변의 일부를 이용하여 만든 수형도이다.

예를 들어, 아래 그림에서 (b)는 (a)의 생성수형도이다. 그러나 (c)는 (a)의 부분그래프인 수형도이지만 (a)의 꼭지점인 F 를 갖고 있지 않기 때문에 (a)의 생성수형도가 아니다.

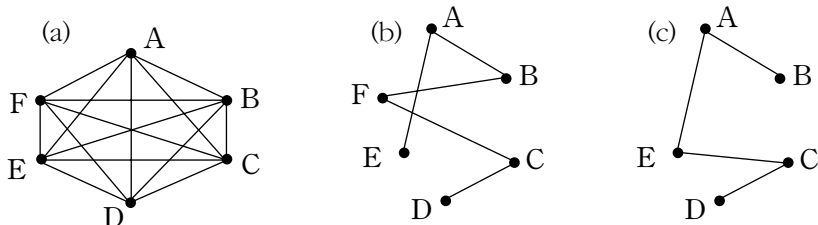


그림 3.5.6

예제 3.5.6 $K_{4,2}$ 의 생성수형도의 개수를 구하여라.

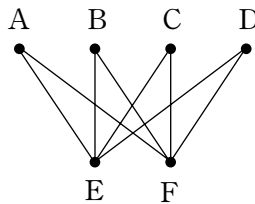


그림 3.5.7

풀이>> 위 그래프의 생성수형도는 A, B, C, D 중 하나만 E와 F에 동시에 인접하고, 나머지는 E나 F 중 한 꼭지점과만 인접한다. 따라서 곱의 법칙에 의하여

$$4 \cdot 2^3 = 32$$

개의 생성수형도가 존재한다. □

문제 3.5.6

길이가 n 인 회로 $C_n : A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \cdots \rightarrow A_n \rightarrow A_1$ 의 생성수형도의 총 개수를 구하여라.

정리 3.5.5

연결그래프 G 에는 항상 생성수형도가 있다.

【증명】 (회로의 수 n 에 대한 수학적귀납법)

n 개의 회로를 갖는 연결그래프가 생성수형도를 갖는 정수 n 의 집합을 S 라 하자.

(i) $n=0$ 이면 G 는 회로가 없는 연결그래프이므로 수형도이고, 따라서 G 가 자신의 생성수형도가 되어 $0 \in S$ 이다.

(ii) 이제 n 보다 작은 음이 아닌 정수는 모두 S 의 원소라고 가정하자.

(iii) $n \geq 1$ 이고 연결그래프 G 가 n 개의 회로를 갖는다고 하자. $\{x, y\}$ 가 G 에 있는 한 회로의 변이라면 G 에서 변 $\{x, y\}$ 를 제거한 그래프 $G - \{x, y\}$ 는 $n-1$ 개 이하의 회로를 갖는 연결그래프이다. (ii)에 의하여 $G - \{x, y\}$ 는 생성수형도 T 를 갖고 있으며 T 는 또한 G 의 생성수형도이므로 $n \in S$ 이다.

그러므로 수학적귀납법에 의하여 집합 S 는 모든 음이 아닌 정수를 포함한다. 즉, 모든 연결그래프에는 항상 생성수형도가 있다. □

예제 3.5.7 다음 그래프 G 의 생성수형도를 찾아라.

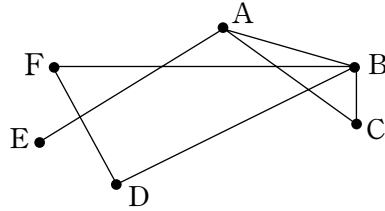


그림 3.5.8

- 풀이 1>>**
- 그림 3.5.8의 그래프에서 한 꼭지점 A 선택
 - A 와 인접한 한 꼭지점 B 와 변 $\{A, B\}$ 선택
 - B 와 인접한 꼭지점 중 이미 사용하지 않은 꼭지점 C 와 변 $\{B, C\}$ 선택
 - C 와 인접한 꼭지점은 모두 사용하였으므로 바로 전 꼭지점인 B 로 돌아감
 - B 와 인접한 꼭지점 중 이미 사용하지 않은 꼭지점 D 와 변 $\{B, D\}$ 선택
 - D 와 인접한 꼭지점 중 이미 사용하지 않은 꼭지점 F 와 변 $\{D, F\}$ 선택
 - F 와 인접한 꼭지점은 모두 사용하였으므로 바로 전 꼭지점인 D 로 돌아감
 - D 와 인접한 꼭지점은 모두 사용하였으므로 바로 전 꼭지점인 B 로 돌아감
 - B 와 인접한 꼭지점은 모두 사용하였으므로 바로 전 꼭지점인 A 로 돌아감
 - A 와 인접한 꼭지점 중 이미 사용하지 않은 꼭지점 E 와 변 $\{A, E\}$ 선택

그래프 G 의 모든 꼭지점이 선택되었으므로 지금까지 선택된 꼭지점과 변으로 만들어진 부분그래프가 G 의 생성수형도이다. (그림 3.5.9 참조)

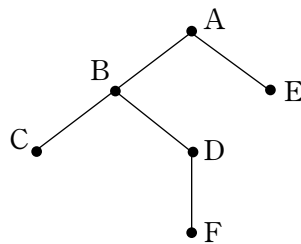


그림 3.5.9

- 풀이 2>>**
- 그림 3.5.8의 그래프에서 한 꼭지점 A 선택
 - A 와 인접한 모든 꼭지점 B, C, E 와 변 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, E\}$ 선택
 - B 와 인접한 꼭지점 중 이미 사용하지 않은 꼭지점 D, F 와 변 $\{B, D\}, \{B, F\}$ 선택

그래프 G 의 모든 꼭지점이 선택되었으므로 지금까지 선택된 꼭지점과 변으로 만들어진 부분그래프가 G 의 생성수형도이다. (그림 3.5.10 참조)

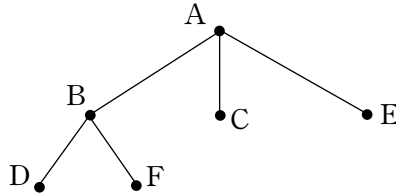


그림 3.5.10



위 예제에서 생성수형도를 찾기 위해 사용한 풀이 1과 풀이 2의 방법을 각각 **깊이 우선 탐색 방법**, **너비 우선 탐색 방법**이라 부른다. 이 방법을 간단하게 정리하면 다음과 같다.

깊이 우선 탐색(depth-first search) 방법

- ① 그래프에서 한 꼭지점을 잡아 현재 꼭지점으로 둔다.
- ② 현재 꼭지점에 인접한 꼭지점 중에서
 - 아직 선택되지 않은 꼭지점이 있으면 그 중 한 꼭지점과 그 두 꼭지점을 잇는 변을 택하고, 새로 선택된 꼭지점을 현재 꼭지점으로 한다.
 - 모든 꼭지점이 이미 선택되었다면 현재 꼭지점 바로 전에 선택된 꼭지점으로 되돌아가서 그 꼭지점을 현재 꼭지점으로 한다.
- ③ 더 이상 선택할 꼭지점이 없으면 과정을 끝내고 그렇지 않으면 위 ②의 과정을 반복한다.

너비 우선 탐색(width-first search) 방법

- ① 그래프에서 한 꼭지점을 잡는다.
- ② 위 ①의 꼭지점에 인접한 모든 꼭지점과 그 두 꼭지점을 잇는 변을 선택한다.
- ③ 차례차례로 위 ②에서 선택한 꼭지점에 인접한 꼭지점 중 이미 사용하지 않은 모든 꼭지점과 그 변을 선택한다.
- ④ 사용하지 않은 꼭지점이 없을 때까지 ③의 과정을 반복한다.

문제 3.5.7

다음 그래프의 생성수형도를 각각 깊이 우선 탐색 방법과 너비 우선 탐색 방법을 이용하여 구하여라.

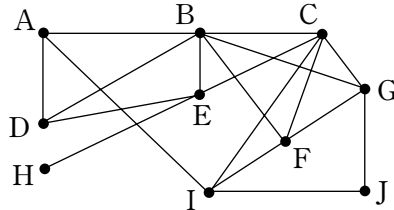


그림 3.5.11

예제 3.5.8 농촌의 다섯 주택 A, B, C, D, E에 수도물 공급을 위하여 배관 작업을 하려고 한다. 각 주택 사이의 거리에 따른 배관작업 비용이 아래 표와 같을 때, 각 주택에 수도물이 공급되도록 최소의 비용으로 배관 작업을 하려면 어떻게 연결하여야 할까?

단위 : 10만원					
	A	B	C	D	E
A	×	2	4	3	2
B	2	×	3	1	3
C	4	3	×	2	3
D	3	1	2	×	5
E	2	3	3	5	×

표 3.5.1

풀이>> 최소의 비용으로 모든 주택에 수도물을 공급하기 위해서는 모든 주택이 수도관으로 서로 연결되어야 하며, 이렇게 연결된 수도관에는 회로가 없어야 한다. 이제 주택 A, B, C, D, E를 꼭지점으로 하는 완전그래프 G의 변 위에 그 변에 해당하는 배관 작업에 필요한 비용을 나타내면 그림 3.5.12와 같고 주어진 문제는 이 그래프에서 변의 값의 합이 최소인 생성수형도를 찾는 문제와 같다.

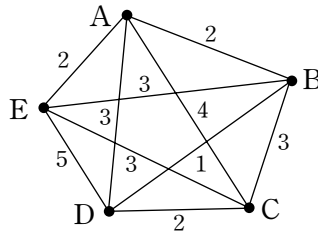


그림 3.5.12

방법 1

Greedy 알고리즘

- ① 그래프에서 변을 제거하여도 남은 그래프가 여전히 연결그래프인 변 중 가장 큰 값을 갖는 변을 제거한다. 단, 같은 값을 갖는 변이 있으면 그중 임의로 한 변을 제거한다.
- ② 남은 그래프가 G 의 생성수형도인지를 살펴본다.
 - 1) 생성수형도가 아니면 ①로 되돌아간다.
 - 2) 생성수형도이면 이 과정을 끝낸다.

위의 방법 1을 이용하여 그래프 G 의 생성수형도 중에서 변의 값의 합이 최소인 생성수형도를 구해보자. (그림 3.5.13)

- 값이 가장 큰 변 $\{E, D\}$ 를 제거하여도 연결그래프가 되므로 변 $\{E, D\}$ 를 제거한다.
- 남은 그래프가 G 의 생성수형도가 아니므로, 제거하여도 연결그래프가 되는 변 중에서 가장 큰 값을 갖는 변 $\{A, C\}$ 를 제거한다.
- 남은 그래프가 G 의 생성수형도가 아니므로, 제거하여도 연결그래프가 되는 변 중에서 가장 큰 값을 갖는 한 변을 제거한다. 아래에서는 변 $\{B, E\}$ 를 제거한다.
- 위의 방법을 계속하면 그림 3.5.13의 마지막에 나와 있는 생성수형도를 얻게 된다. 따라서

$$E \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$$

의 경로를 따라 배관한다. 이 때 필요한 경비는 칠십만원이다.

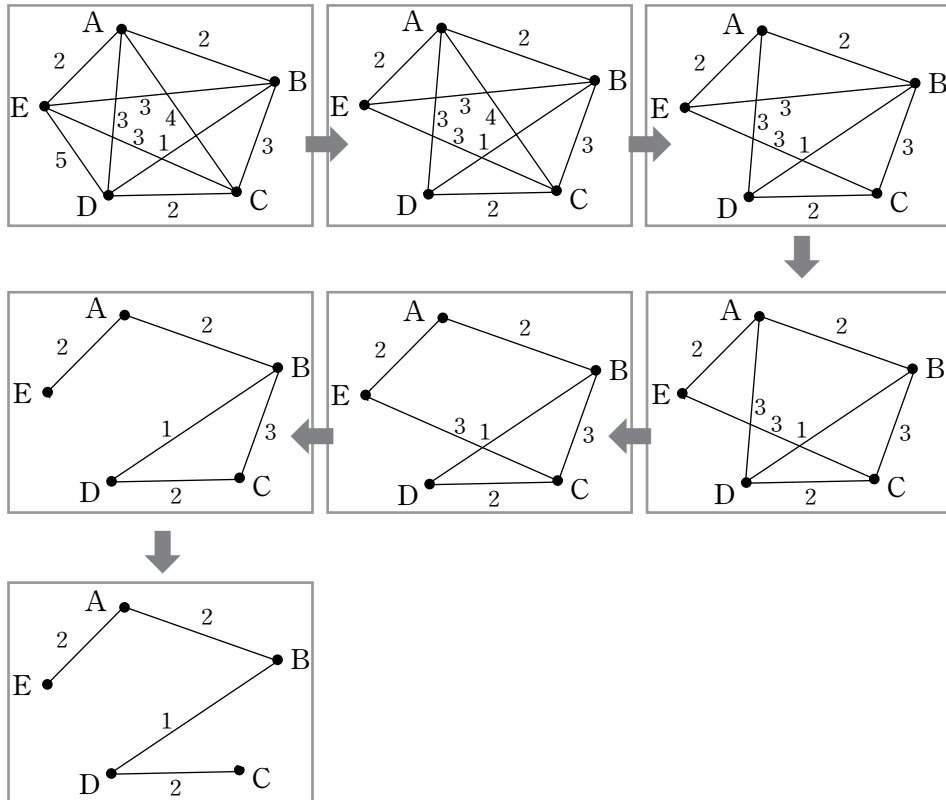


그림 3.5.13

방법 2 Kruskal 알고리즘

- ① 가장 작은 값을 갖는 변을 선택한다. 단, 같은 값을 갖는 변이 있으면 그 중 임의로 한 변을 선택한다.
- ② 나머지 변 중에서 이미 선택된 부분그래프와 회로를 이루지 않으면서 변의 값이 최소인 변을 선택한다.
- ③ 이미 선택된 변으로 만들어진 그래프가 G 의 생성수형도인지 살펴본다.
 - 1) 생성수형도가 아니면 ②로 되돌아간다.
 - 2) 생성수형도이면 이 과정을 끝낸다.

위의 방법 2를 이용하여 그래프 G 의 생성수형도 중에서 변의 값의 합이 최소인 생성수형도를 구해보자. (그림 3.5.14)

- 먼저 값이 가장 작은 변 (B, D) 를 선택한다.

- 선택된 그래프가 G 의 생성수형도가 아니므로, 앞의 그래프와 회로를 이루지 않는 변 중 최소값을 갖는 한 변 $\{A, E\}$ 를 선택한다.
- 선택된 그래프가 G 의 생성수형도가 아니므로, 앞의 그래프와 회로를 이루지 않는 변 중 최소값을 갖는 한 변 $\{A, B\}$ 를 선택한다.
- 선택된 그래프가 G 의 생성수형도가 아니므로, 앞의 그래프와 회로를 이루지 않는 변 중 최소값을 갖는 한 변 $\{D, C\}$ 를 선택한다.
- 선택된 그래프가 G 의 생성수형도이므로 그림 3.5.14의 마지막에 있는 그래프가 변의 값의 합이 최소인 G 의 생성수형도이다.
따라서 이 때 필요한 경비는 칠십만원이다.

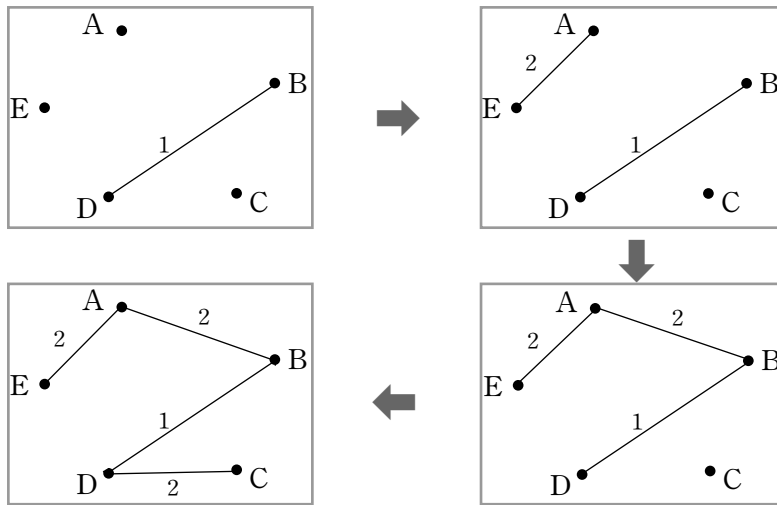


그림 3.5.14



문제 3.5.8

다음 그래프의 변의 값의 합이 최소인 생성수형도를 각각 예제 3.5.8에서 이용한 방법 1과 방법 2를 이용하여 찾아라.

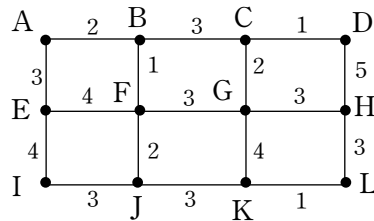


그림 3.5.15

세 꼭지점을 갖는 수형도 중에서 동형이 아닌 것은 아래 그림의 그래프 (a) 단 하나
 다만 꼭지점 A,B,C를 갖는 수형도는 (b)와 같이 세 가지가 있다.

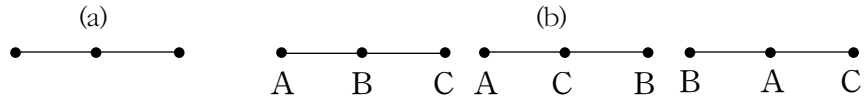


그림 3.5.16

또, 네 꼭지점을 갖는 수형도 중에서 동형이 아닌 것은 아래 그림처럼 두 가지뿐이다.



그림 3.5.17

한편, 네 개의 꼭지점 A,B,C,D를 갖는 수형도는 그림 3.5.18과 같이 16가지가 있다.

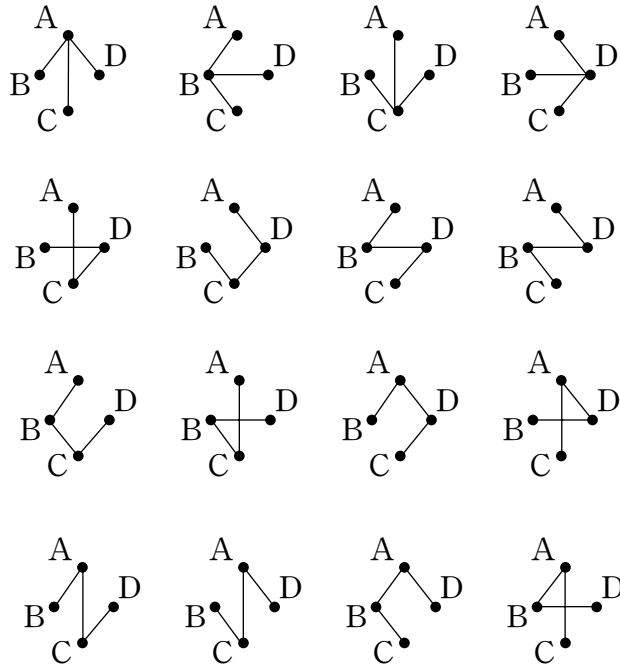


그림 3.5.18

1889년 Cayley는 n 개의 꼭지점 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 갖는 수형도의 개수는 n^{n-2} 임을 보였다.

정리 3.5.6 (Cayley의 수형도 공식)

n 개의 꼭지점 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 갖는 서로 다른 수형도의 개수는 n^{n-2} 이다. □

예제 3.5.9 n 개의 꼭지점 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 갖는 완전그래프 K_n 의 생성수형도의 개수를 구하여라.

풀이>> 꼭지점이 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 인 완전그래프 K_n 의 생성수형도의 개수는 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 꼭지점으로 갖는 수형도의 개수와 같으므로 정리 3.5.6에 의하여 n^{n-2} 이다. □

문제 3.5.9

다음 그래프의 생성수형도의 개수를 구하여라.

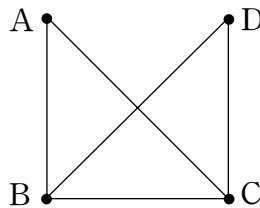
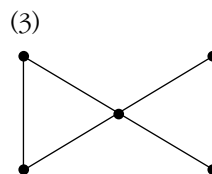
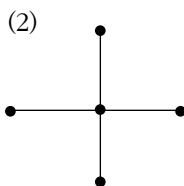
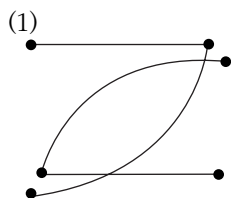


그림 3.5.19

>> 연습문제 3.5

1 다음 그래프가 수형도인지 아닌지를 판별하여라.



2 수형도에서 한 꼭지점 A 와 그리고 A 에 근접한 모든 변을 삭제하였더니 남은 그래프도 수형도가 되었다. 꼭지점 A 의 차수를 구하여라.

3 수형도 $G(V, E)$ 의 한 꼭지점을 a 라고 할 때

$$A = \{x \mid a \text{에서 } x \text{까지의 경로의 길이가 짝수}\}$$

$$B = \{x \mid a \text{에서 } x \text{까지의 경로의 길이가 홀수}\}$$

으로 정의된다.

(1) 집합 A 에 있는 두 꼭지점 사이에는 변이 있는가? 또, 집합 B 에 있는 두 꼭지점 사이에는 변이 있는가?

(2) 위 (1)의 결과를 이용하여 수형도는 이분그래프임을 보여라.

4 서로 연결되어 있지 않은 k 개의 수형도 $T_1, T_2, \dots, T_k$ 로 이루어진 그래프를 G 라 하자. G 의 꼭지점의 개수가 n 이라면 G 의 변의 개수는 얼마인가?

5 수형도는 평면그래프임을 보여라.

6 56명이 토너먼트로 테니스 단식 경기를 하려고 한다. 우승자가 나올 때까지 총 경기 수를 구하여라.

7 꼭지점의 개수보다 변의 개수가 더 작은 연결그래프는 수형도임을 보여라.

8 n 개의 꼭지점을 갖는 그래프 G 의 꼭지점의 차수를 각각 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 이라 하자. 그래프 G 가 수형도이기 위한 필요충분조건은 G 가 연결그래프이고

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

임을 보여라.

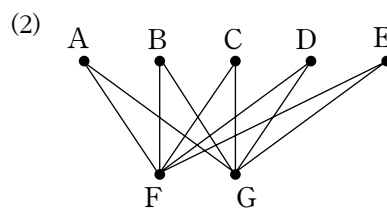
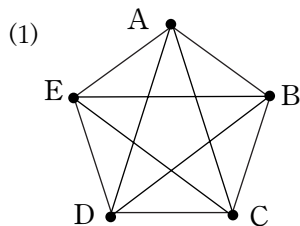
9 수형도에서 길이가 가장 긴 경로의 양 끝 꼭지점의 차수는 1임을 보여라. 또, 이 사실을 이용하여 꼭지점의 수가 2 이상인 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 적어도 두 개 있음을 보여라.

10 꼭지점이 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 수형도에서 차수가 1인 꼭지점의 수는

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |d(v_i) - 2|$$

임을 보여라. 여기서 $d(v_i)$ 는 꼭지점 v_i 의 차수이다.

11 다음 각 그래프에서 서로 다른 생성수형도의 총 개수를 구하여라.



12 $n_T(G)$ 를 그래프 G 의 생성수형도의 개수라고 하자. e 를 G 의 한 변이라 할 때

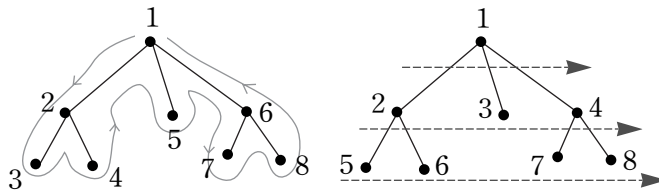
$$n_T(G) = n_T(G - e) + n_T(G/e)$$

임을 보여라.

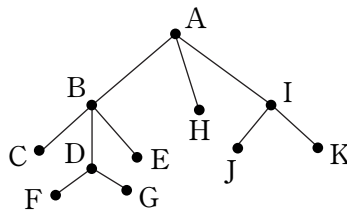
13 다음은 수형도의 모든 꼭지점을 검색하는 방법이다.

(1) 깊이 우선 탐색

(2) 너비 우선 탐색



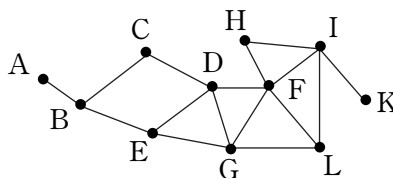
각각 위의 방법을 이용하여 다음 수형도의 모든 꼭지점을 탐색할 때 탐색되는 꼭지점을 순서대로 나열하여라.



(1) A부터 시작하여 깊이 우선 탐색 방법을 이용하는 경우

(2) A부터 시작하여 너비 우선 탐색 방법을 이용하는 경우

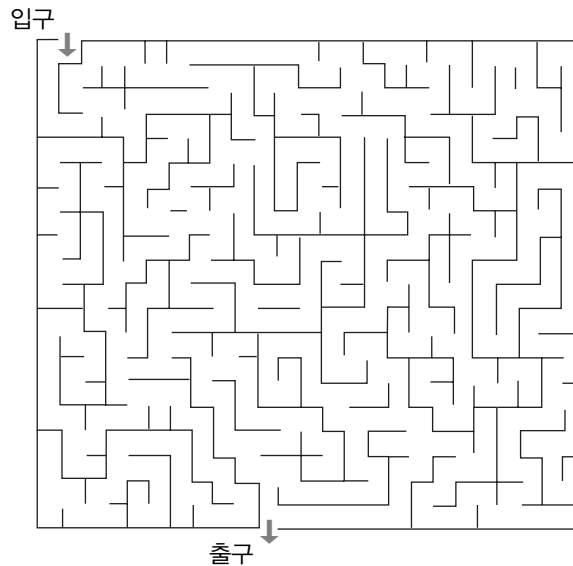
14 각각 깊이 우선 탐색과 너비 우선 탐색의 방법을 이용하여 다음 그래프의 생성 수형도를 찾아라.



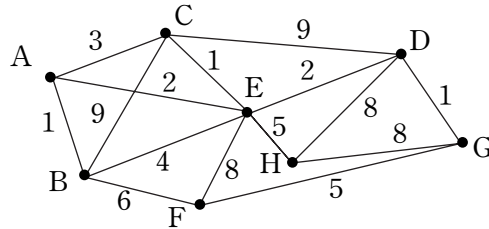
15 용량이 각각 10리터, 7리터, 4리터인 세 양동이기가 있다. 10리터 용량의 양동이엔 물이 가득 차 있고 7리터, 4리터 용량의 두 양동이는 비어 있다고 하자. 이제 세 양동이를 이용하여 물을 채우고 비우는 작업을 여러 차례 반복하여 7리터 용량의 양동이나 4리터 용량의 양동이에 2리터의 물을 남기려 한다.

- (1) 어떻게 하여야 7리터 용량의 양동이나 4리터 용량의 양동이에 2리터의 물을 남길 수 있을까? 단, 물을 채우고 비울 때는 더 이상 채울 수 없거나 비울 수 없을 때까지 계속 채우거나 비우도록 하기로 한다.
- (2) 이 경우 깊이 우선 탐색과 너비 우선 탐색 중 어떤 방법이 더 효율적인가?

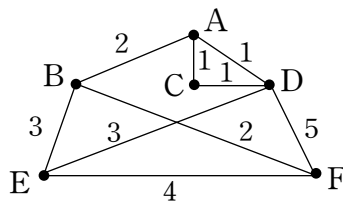
16 다음 그림에 있는 미로에서 입구로 들어가서 출구로 나오는 길을 찾아라. 이 경우 깊이 우선 탐색과 너비 우선 탐색 중 어떤 방법이 더 효율적인가?



- 17** 다음 연결그래프에서 Kruskal 알고리즘을 이용하여 변의 값의 합이 최소인 생성수형도를 찾아라.



- 18** 아래에 기술된 Prim 알고리즘을 이용하여 다음 그래프의 변의 값의 합이 최소인 생성수형도를 찾아라.

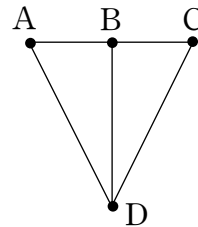
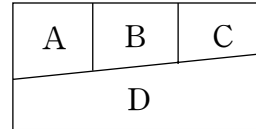


Prim 알고리즘

- ① 가장 작은 값을 갖는 변을 선택한다. 단, 같은 값을 갖는 변이 있으면 그 중 임의로 한 변을 선택한다.
- ② 이미 선택된 그래프의 꼭지점에 근접하는 변 중에서 사용되지 않은 값이 가장 작은 변을 선택한다.
- ③ 이미 선택된 그래프가 원래 그래프의 생성수형도인지 살펴본다.
 - 1) 생성수형도가 아니라면 ②로 되돌아간다.
 - 2) 생성수형도라면 이 과정을 끝낸다.

제6절 색칠문제

인접한 지역은 서로 다른 색이 되도록 지도의 모든 지역을 네 가지 색깔로 색칠할 수 있을까? 이 문제는 1976년 아펠과 하켄이 해결할 때까지 100여 년간 미해결 문제로 남아 있던 사색문제이다. 지도에 나타난 각 지역을 꼭지점으로 하고 두 지역 사이에 경계선이 있으면 그 지역을 나타내는 꼭지점이 인접한 그래프를 생각하여 보자. 그러면 사색문제는 인접한 꼭지점은 다른 색깔을 갖도록 꼭지점을 색칠할 때 모든 평면그래프의 꼭지점은 네 가지 색깔로 색칠될 수 있는가 하는 문제가 된다. 이 절에서는 사색문제처럼 그래프의 꼭지점을 색칠할 때 필요한 색깔의 최소수를 구하고 이를 이용하여 해결할 수 있는 실생활의 문제를 살펴보기로 하자.



정의 3.6.1 인접한 꼭지점은 서로 다른 색깔을 갖도록 그래프 G 의 모든 꼭지점을 색칠할 때, 필요한 색깔의 최소수를 G 의 **색채수**(chromatic number)라 하고 $\chi(G)$ 로 나타낸다.

예제 3.6.1 다음 그래프의 색채수를 구하여라.

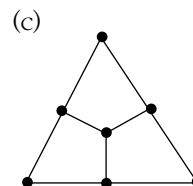
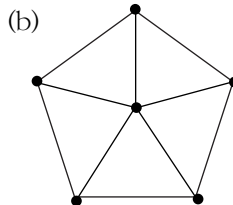
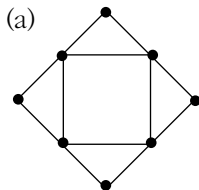


그림 3.6.1

풀이>> 그래프에서 삼각형을 이루는 세 꼭지점은 서로 다른 세 색깔로 색칠되어야 한다. 이 사실을 이용하여 각 그래프의 꼭지점에 배정되는 색깔을 번호를 나타내면 그림 3.6.2와 같고, 따라서 위 그래프의 색채수는 각각 3, 4, 2이다.

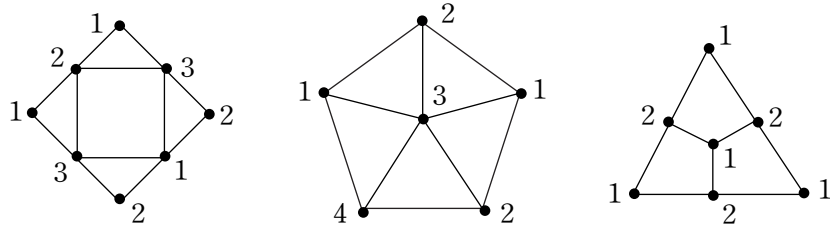


그림 3.6.2



문제 3.6.1

다음 그래프의 색채수를 구하여라.

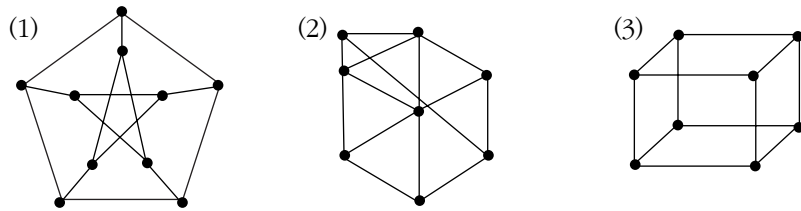


그림 3.6.3

예제 3.6.2 다섯 명의 연사 A, B, C, D, E가 한 시간씩 강연하는 강연회가 있다. 다음 표처럼 연사들도 다른 연사들의 강연을 듣고 싶어 한다. 연사들이 듣고 싶은 강연을 모두 들을 수 있도록 시간을 배정한다고 할 때 이 강연회가 끝나려면 최소한 몇 시간이 필요한가?

연사 A가 듣고 싶어 하는 강연의 연사	B, C
연사 B가 듣고 싶어 하는 강연의 연사	C, D
연사 C가 듣고 싶어 하는 강연의 연사	A
연사 D가 듣고 싶어 하는 강연의 연사	C
연사 E가 듣고 싶어 하는 강연의 연사	C, D

표 3.6.1

풀이>> 연사 A, B, C, D, E를 꼭지점으로 하고 한 연사가 다른 연사의 강연을 듣고 싶으면 두 연사 사이를 변으로 연결한 그래프를 생각하면 아래 그림과 같다.

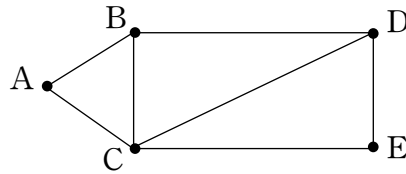


그림 3.6.4

그러면 이 그래프의 색채수가 강연회에 필요한 최소한의 시간수이다.

위의 그래프에서 꼭지점 A, B, C는 삼각형을 이루므로 적어도 3가지 색깔이 필요하고 A, B, C, D, E에 각각 1, 2, 3, 1, 2로 색칠할 수 있으므로 이 그래프의 색채수는 3이다.

따라서 세 시간만 있으면 연사들이 듣고 싶은 강연을 모두 들을 수 있도록 시간을 배정할 수 있다. □

문제 3.6.2

어느 대학 수학과에는 10명의 교수 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J가 재직하고 있고 교수들은 다음과 같이 8개의 위원회에 소속되어 있다.

수학과의 모든 교수가 소속된 위원회에 참석하여 한 시간 동안 회의할 수 있도록 시간을 배정하려면 최소 몇 시간이 필요한가?

위원회	교수	위원회	교수
인사위원회	A, B, C, D	교양교육위원회	D, E
도서관위원회	A, E, F, G	교과과정위원회	C, A
홍보위원회	G, H, I, J	출판위원회	I, G
복지위원회	H, B, F	대학원위원회	J, C

표 3.6.2

예제 3.6.3 모든 평면 그래프 G 에 대해

$$\chi(G) \leq 6$$

임을 보여라.

【증명】 (꼭지점의 개수에 대한 수학적귀납법)

(i) G 가 6 이하의 꼭지점을 가지면 분명히 $\chi(G) \leq 6$ 이다.

(ii) $n \geq 7$ 이고 꼭지점의 수가 n 보다 작은 모든 평면 그래프 G 에 대해

$$\chi(G) \leq 6$$

라고 하자.

(iii) 이제 G 가 꼭지점의 수가 n 인 평면그래프라고 하자. 정리 3.4.4에 의하여 G 에는 차수가 5 이하인 꼭지점 x 가 있다. G 에서 x 와 근접한 모든 변과 꼭지점 x 를 제외한 그래프 G' 은 꼭지점의 수가 n 보다 작으므로 (ii)에 의하여

$$\chi(G') \leq 6$$

이다. x 의 차수를 5라 하고 그와 인접한 꼭지점을 A, B, C, D, E 라 하자.

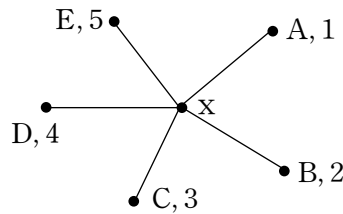


그림 3.6.5

위의 그림처럼 그래프 G' 에서 꼭지점 A, B, C, D, E 가 각각 1, 2, 3, 4, 5의 색깔로 색칠되었다면 꼭지점 x 를 6으로 색칠하여 G 의 모든 꼭지점을 6가지 색깔로 색칠할 수 있다. 따라서 $\chi(G) \leq 6$ 이다. □

문제 3.6.3

그래프 G 의 모든 꼭지점의 차수가 3 이하이면 $\chi(G) \leq 4$ 임을 보여라.

아래의 왼쪽 그림은 인접하면 다른 색깔이 되도록 모든 꼭지점을 1, 2, 3, 4의 색깔로 색칠한 그래프이다. 이 그래프에서 1, 2로 색칠된 연결부분그래프 중에서 가장 꼭지점이 많은 그래프의 꼭지점의 색깔을 1은 2로, 2는 1로 바꾸면 아래의 오른쪽 그림과 같다.

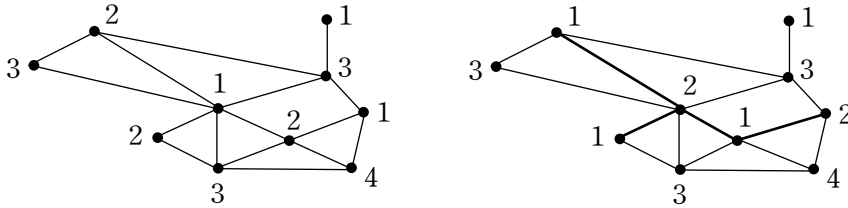


그림 3.6.6

위의 그림에서 보듯이 1과 2만으로 색칠된 부분그래프 중 꼭지점이 가장 많은 연결부분그래프의 꼭지점의 색깔을 1은 2로, 2는 1로 바꾸어도 여전히 인접한 두 꼭지점은 서로 다른 색깔을 갖는다. 이 사실을 이용하여 다음 정리를 증명하여 보자.

정리 3.6.2

모든 평면그래프 G 에 대해 $\chi(G) \leq 5$ 이다.

【증명】 (꼭지점의 개수에 대한 수학적귀납법)

- (i) G 가 5 이하의 꼭지점을 가지면 분명히 $\chi(G) \leq 5$ 이므로 위의 정리가 성립한다.
- (ii) $n \geq 6$ 이고 꼭지점의 수가 n 보다 작은 모든 평면 그래프 G 에 대해

$$\chi(G) \leq 5$$

라고 하자.

- (iii) 이제 G 를 꼭지점의 수가 n 인 평면그래프라고 하자. 정리 3.4.4에 의하여 G 는 차수가 5 이하인 꼭지점 x 를 갖고 있다. G 에서 꼭지점 x 와 이를 잇는 모든 변을 제외한 그래프 G' 은 꼭지점의 수가 $n-1$ 이므로 (ii)에 의하여

$$\chi(G') \leq 5$$

이다. x 의 차수를 5라 하고 그와 인접한 꼭지점을 A, B, C, D, E 라 하자.

경우 1 : G' 에서 꼭지점 A, B, C, D, E가 네 색깔로 색칠되는 경우 (그림 3.6.7)

G' 에서 꼭지점 A, B, C, D, E가 네 색깔 1, 2, 3, 4로 색칠해졌다면 G 에서 x 를 5로 색칠하여 G 를 5가지 색깔로 색칠할 수 있다.

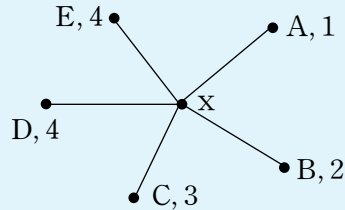


그림 3.6.7

경우 2 : G' 에서 꼭지점 A, B, C, D, E가 다섯 색깔로 색칠되는 경우 (그림 3.6.8)

그림 3.6.8처럼 G' 에서 꼭지점 A, B, C, D, E가 각각 다섯 색깔 1, 2, 3, 4, 5로 칠해졌다고 하자.

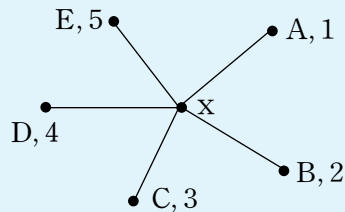


그림 3.6.8

꼭지점 A를 포함하며 1과 3만으로 색칠된 G 의 부분그래프 중 꼭지점이 가장 많은 연결부분그래프 C_A 와 꼭지점 C를 포함하며 1과 3만으로 색칠된 G 의 부분그래프 중 꼭지점이 가장 많은 연결부분그래프 C_C 를 생각하여 보자.

① 두 부분그래프 C_A 와 C_C 가 꼭지점을 공유하지 않을 때 (즉 $C_A \neq C_C$ 일 때)

C_A 에 있는 꼭지점의 색깔을 1은 3으로, 3은 1로 바꾸어 색칠하여 꼭지점 A를 3으로 색칠할 수 있다.

② 두 부분그래프 C_A 와 C_C 가 꼭지점을 공유할 때 (즉, $C_A = C_C$ 일 때)

다시 꼭지점 B를 포함하며 2와 4로 색칠된 G 의 부분그래프 중 꼭지점이 가장 많은 연결부분그래프 C_B 와 D를 포함하며 2와 4로 색칠된 G

의 부분그래프 중 꼭지점이 가장 많은 연결부분그래프 C_D 를 생각하여 보자.

- C_B 와 C_D 가 꼭지점을 공유하지 않는다면 C_B 에 있는 꼭지점의 색깔을 2는 4로, 4는 2로 바꾸어 색칠하여 꼭지점 B를 4로 색칠할 수 있다.
- C_B 와 C_D 가 꼭지점을 공유한다면 $C_B = C_D$ 이다. 한편 $C_A = C_C$ 이므로 C_A 는 1과 3으로 색칠해진 A와 C를 잇는 경로 P 를 포함하며 C_B 는 2와 4로 색칠해진 B와 D를 잇는 경로 P' 을 포함한다. G 는 평면그래프이므로 P 와 P' 은 반드시 한 꼭지점에서 만나고 그 꼭지점은 두 가지 색으로 색칠되므로 모순이다.

따라서 어느 경우에도 꼭지점 A, B, C, D, E는 네 색깔로 색칠할 수 있고 이제 x 를 나머지 색으로 색칠하면 G 는 5가지 색깔로 색칠할 수 있다. $\square$

예제 3.6.4 꼭지점의 수가 6인 평면그래프 G 에 대하여 $\chi(G) \leq 4$ 임을 보여라.

풀이>> 꼭지점의 차수에 따라 다음 세 경우로 나누어 생각하여 보자.

- ① G 의 모든 꼭지점의 차수가 3 이하이면 당연히 $\chi(G) \leq 4$ 이다.
- ② G 의 한 꼭지점 A의 차수가 4라고 하자.

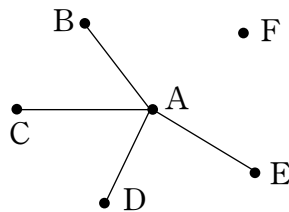


그림 3.6.9

G 는 평면그래프이므로 꼭지점 A, B, C, D, E로 이루어진 G 의 어떤 부분그래프도 K_5 는 아니다. 따라서 B, C, D, E 중 어떤 두 꼭지점은 서로 인접하지 않는다.

이 인접하지 않은 두 꼭지점을 1로, A와 F는 2로, 나머지 두 꼭지점은 각각 3과 4로 색칠한다.

③ G 의 한 꼭지점 A 의 차수가 5라고 하자.

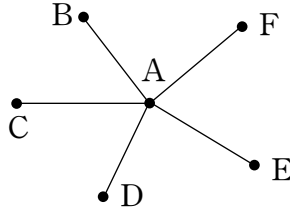


그림 3.6.10

G 는 평면그래프이므로 G 는 K_5 를 포함하지 않는다. 따라서 B, C, D, E, F 중 어떤 두 꼭지점은 서로 인접하지 않는다. 그 두 꼭지점을 B, C 라 하자.

마찬가지로 꼭지점 A, B, D, E, F 중 어떤 두 꼭지점은 서로 인접하지 않는다. 인접하지 않는 두 꼭지점을 D 와 E 라고 하면 A 를 1로, B 와 C 를 2로, D 와 E 를 3으로, F 를 4로 칠한다.

한편, 인접하지 않는 두 꼭지점을 B 와 E 라고 하면 A 를 1로, B 와 C 와 E 를 2로, D 를 3으로, F 를 4로 칠한다.

위의 어떤 경우든 4가지 이하의 색으로 색칠할 수 있으므로 $\chi(G) \leq 4$ 이다. $\square$

문제 3.6.4

꼭지점의 수가 5인 평면그래프 G 에 대하여 $\chi(G) \leq 4$ 임을 보여라.

1852년 오스트리아의 수학자 De Morgan의 한 학생이던 Guthrie는 그의 스승에게 모든 평면 그래프 G 에 대해 $\chi(G) \leq 4$ 인지를 묻는 사색문제(Four color problem)를 제기하였다. 그 이후로 사색문제는 잘못 풀이된 것만도 책 한권이 넘을 정도로 100년 넘게 해결하지 못한 유명한 문제가 되었다. 마침내, 1976년 미국의 Appel과 Haken은 가능한 모든 경우를 컴퓨터로 확인하여 사색문제를 해결하였다. 그러나 그들의 증명은 경우의 수가 너무 많아 컴퓨터로 확인하는 시간만도 1200시간 가까이 걸렸을 정도로 매우 복잡하다.

정리 3.6.3 (사색문제, Four color problem)

모든 평면그래프 G 에 대하여

$$\chi(G) \leq 4$$

이다. □

정의 3.6.4 인접한 두 꼭지점은 서로 다른 색깔을 갖도록 그래프 G 의 모든 꼭지점을 k 가지 색깔로 색칠할 수 있는 방법의 수를 $c_k(G)$ 로 나타내고 그래프 G 의 **색채수다항식**(chromatic polynomial)이라 한다.

예제 3.6.5 다음 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 를 구하여라.

(1) $G = K_n$

(2) G 는 꼭지점의 수가 n 이고 변의 수가 0인 그래프

풀이>> (1) G 의 꼭지점을 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 이라 하자. 꼭지점 A_1 은 k 가지, A_2 는 A_1 에 색칠된 색을 제외한 $(k-1)$ 가지로 색칠할 수 있다. 일반적으로 A_i 는 $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}$ 에 색칠된 색을 제외한 $(k-i+1)$ 가지로 색칠할 수 있으므로 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 을 색칠할 수 있는 방법의 수는 곱의 법칙에 의해

$$c_k(G) = k(k-1) \cdots (k-n+1)$$

이다.

(2) 어느 두 꼭지점 사이에도 변이 존재하지 않으므로 모든 꼭지점은 k 가지로 색칠할 수 있다. 따라서 곱의 법칙에 의해 $c_k(G) = k^n$ 이다. □

문제 3.6.5

꼭지점의 수가 n 인 수형도 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 를 구하여라.

정리 3.6.5

$e=\{x, y\}$ 를 그래프 G 의 한 변이라 하자. 그러면

$$c_k(G) = c_k(G-e) - c_k(G/e)$$

이다.

【증명】 인접한 꼭지점은 서로 다른 색깔을 갖도록 $G-e$ 를 k 가지 색깔로 색칠하였다고 하자.

① 두 꼭지점 x, y 가 서로 다른 색깔일 경우

$G-e$ 를 색칠했던 방법 그대로 그래프 G 를 색칠할 수 있고 반대로 G 에서 색칠한 방법과 같게 $G-e$ 를 색칠할 수 있으므로 $c_k(G-e) = c_k(G)$ 이다.

② 두 꼭지점 x, y 가 같은 색깔일 경우

y 를 제외하고 $G-e$ 를 색칠했던 방법 그대로 그래프 G/e 를 색칠할 수 있고 반대로 G/e 에서 색칠한 방법으로 $G-e$ 를 색칠할 수 있으므로 $c_k(G-e) = c_k(G/e)$ 이다.

위에서 ①과 ②는 동시에 일어나지 않으므로 합의 법칙에 의하여

$$c_k(G-e) = c_k(G) + c_k(G/e)$$

이다. 즉, $c_k(G) = c_k(G-e) - c_k(G/e)$ 이다. □

예제 3.6.6 다음 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 를 구하여라.

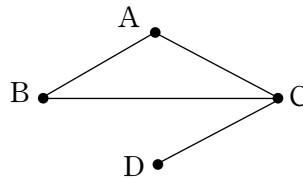


그림 3.6.11

풀이>> $e=\{C, D\}$ 라 하면 $G-e$ 와 G/e 는 각각 다음과 같다.

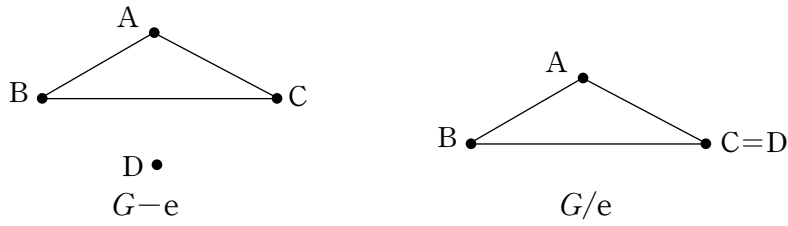


그림 3.6.12

$G-e$ 에서 꼭지점 D 는 k 가지 색깔로 칠할 수 있고 꼭지점 A, B, C 로 이루어진 회로는 예제 3.6.5의 (1)에 의해 $k(k-1)(k-2)$ 방법으로 칠할 수 있으므로 곱의 법칙에 의하여

$$c_k(G-e) = k \cdot k(k-1)(k-2) = k^2(k-1)(k-2)$$

이다.

마찬가지로 G/e 는 완전그래프 K_3 이고 $c_k(G/e) = k(k-1)(k-2)$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} c_k(G) &= c_k(G-e) - c_k(G/e) = k^2(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2) \\ &= k(k-1)^2(k-2) \end{aligned}$$

이다. □

문제 3.6.6

다음 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 를 구하여라.

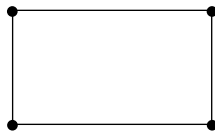


그림 3.6.13

예제 3.6.7 꼭지점의 개수가 n 인 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 는 다음과 같은 형태의 n 차 다항식임을 보여라.

$$c_k(G) = k^n - mk^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + a_{n-3}k^{n-3} + \cdots + a_2k^2 + a_1k$$

여기서 $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ 는 정수이고 m 은 G 의 변의 개수이다.

【증명】 (G 의 변의 개수에 관한 수학적귀납법)

- (i) G 가 변이 하나도 없다면 $c_k(G) = k^n$ 이므로 위의 정리가 성립한다.
- (ii) 변의 수가 m 보다 작은 모든 그래프는 위 정리의 성질을 모두 만족한다고 하자.
- (iii) G 를 m 개의 변을 갖는 그래프라 하고 e 를 G 의 한 변이라 하자. (단, $m \geq 1$)

두 그래프 $G-e$ 와 G/e 는 모두 $(m-1)$ 개의 변을 갖고 있으므로 (ii)에 의하여

$$c_k(G-e) = \sum_{i=1}^{n-2} r_i k^i - (m-1)k^{n-1} + k^n \quad (\text{각 } r_i \text{는 정수}),$$

$$c_k(G/e) = \sum_{i=1}^{n-3} s_i k^i - (m-1)k^{n-2} + k^{n-1} \quad (\text{각 } s_i \text{는 정수})$$

로 나타낼 수 있다. 정리 3.6.6에 의해

$$\begin{aligned} c_k(G) &= c_k(G-e) - c_k(G/e) \\ &= \sum_{i=1}^{n-3} (r_i - s_i) k^i + (r_{n-2} + m - 1) k^{n-2} - m k^{n-1} + k^n \end{aligned}$$

이다. □

문제 3.6.7

꼭지점의 개수가 n 인 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 가

$$c_k(G) = k^n - mk^{n-1} + a_{n-2}k^{n-2} + a_{n-3}k^{n-3} + \cdots + a_2k^2 + a_1k$$

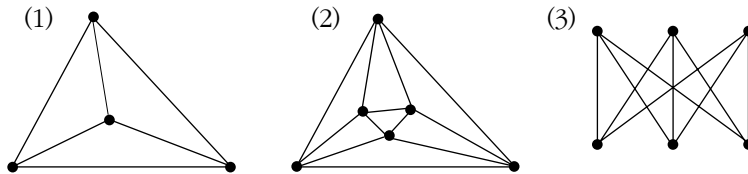
이면,

$$a_{n-2} \geq 0, \quad a_{n-3} \leq 0, \quad a_{n-4} \geq 0, \quad a_{n-5} \leq 0, \quad \dots$$

임을 보여라.

>> 연습문제 3.6

1 다음 그래프의 색채수 $\chi(G)$ 를 구하여라.



2 다음 그래프 G 의 색채수 $\chi(G)$ 를 구하여라.

(1) G 는 꼭지점의 개수가 짝수인 회로

(2) G 는 꼭지점의 개수가 홀수인 회로

(3) 완전이분그래프 $K_{m,n}$

3 어느 동물원에서는 동물원 선전을 위하여 다음과 같은 동물 먹이주기 투어를 계획하고 있다.

투어 1 : 사자, 코끼리, 버팔로

투어 2 : 원숭이, 코뿔소, 사슴

투어 3 : 코끼리, 얼룩말, 기린

투어 4 : 코뿔소, 악어, 곰

투어 5 : 캥거루, 원숭이, 바다사자

동물원에서는 하루에 한번 먹이를 주며, 먹이 주는 시간에는 한 여행 팀이 한 투어에만 들어갈 수 있다. 동물원은 월요일, 수요일, 금요일에 모든 투어를 계획할 수 있을까?

4 그래프 G 가 $\chi(G) \leq k$ 이기 위한 필요충분조건은 $c_k(G) > 0$ 임을 보여라.

5 다음 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 를 구하여라.

- (1) G 는 길이가 n 인 회로
- (2) $G = K_4 - e$ (e 는 K_4 의 한 변)

6 다음 물음에 답하여라.

- (1) 색채수가 4인 평면그래프를 찾아라.
- (2) 색채수가 4인 그래프 중에서 길이 3인 회로가 없는 그래프를 찾아라.

7 그래프 G 가 이분그래프이기 위한 필요충분조건은 $\chi(G) = 2$ 임을 보여라.

8 n 개의 원으로 이루어진 지도는 경계가 구분되게 2가지 색깔로 칠할 수 있음을 보여라.

9 그래프 G 의 꼭지점의 최고 차수가 d 라면 $\chi(G) \leq d + 1$ 임을 보여라. 또 $\chi(G) = d + 1$ 인 그래프 G 를 찾아라.

10 그래프 G 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

- (1) $\chi(G) = 2$ 이면 G 는 길이가 홀수인 회로를 포함하지 않음을 보여라.
- (2) G 가 길이가 홀수인 회로를 포함하지 않으면 $\chi(G) = 2$ 임을 보여라.

11 G 가 8개의 꼭지점과 13개의 변을 갖는 평면그래프라면

$$\chi(G) \neq 2$$

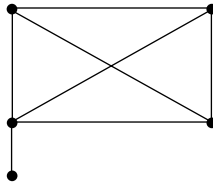
임을 보여라.

12 사색정리를 이용하지 않고 꼭지점수가 11 이하인 평면그래프 G 는

$$\chi(G) \leq 4$$

임을 보여라.

13 다음 그래프 G 의 색채수다항식 $c_k(G)$ 를 구하여라.



제7절 행렬과 그래프

이제까지 우리는 주로 그림을 그려 그래프를 표현하였으나 이런 그림 표현 외에도 그래프를 표현하는 여러 가지 방법이 있다. 이 절에서는 행렬을 이용하여 그래프를 표현하고 행렬의 기본연산으로부터 얻어지는 그래프의 성질에 대하여 살펴보기로 하자.

정의 3.7.1 n 개의 꼭지점 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 을 갖는 (다중)그래프 G 에서 a_{ij} 를 그래프 G 에서 두 꼭지점 v_i 와 v_j 를 잇는 변의 수라고 할 때, $n \times n$ 행렬 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 를 그래프 G 의 **인접행렬**(adjacency matrix)이라고 한다.

예제 3.7.1 다음 그래프 G 의 인접행렬 $A(G)$ 를 구하여라.

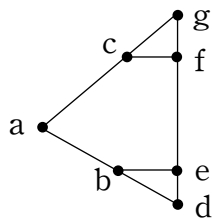


그림 3.7.1

풀이>> a, b, c, d, e, f, g의 순서로 그래프 G 의 인접행렬을 구하여 보자. 먼저 a와 인접한 꼭지점은 b와 c뿐이므로 첫째행에서 b, c에 해당되는 둘째, 셋째 성분만 1이고 나머지는 모두 0이다. 같은 방법으로 꼭지점 b에 인접한 꼭지점은 a, d, e뿐이므로 둘째행의 첫째, 넷째, 다섯째 성분만 1이고 나머지는 모두 0이다. 이런 방법으로 G 의 인접행렬을 완성하면 $A(G)$ 는

$$A(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

이다.



문제 3.7.1

다음 그래프 G 의 인접행렬 $A(G)$ 를 구하여라.

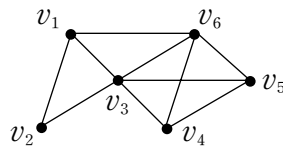


그림 3.7.2

예제 3.7.2 아래의 $A(G)$ 는 꼭지점이 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 인 그래프 G 의 인접행렬이다.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) v_1 과 인접한 꼭지점을 구하여라.
- (2) 각 꼭지점의 차수를 구하여라.
- (3) 그래프 G 의 변의 개수를 구하여라.
- (4) 그래프 G 를 그려라.

풀이>> (1) 꼭지점 v_1 과 인접한 꼭지점은 v_2, v_3, v_5 이다.

(2) i 번째 행의 성분의 합은 v_i 의 차수 $d(v_i)$ 이다. 따라서

$$d(v_1)=3, d(v_2)=3, d(v_3)=3, d(v_4)=2, d(v_5)=1$$

(3) G 의 변의 개수를 e 라 하면 꼭지점의 차수의 합은 $2e$ 이므로 $12=2e$, 즉 $e=6$ 이다.

(4) 그래프 G 는 다음과 같다.

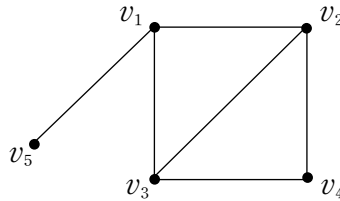


그림 3.7.3



문제 3.7.2

꼭지점 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ 을 갖는 그래프 G 의 인접행렬 $A(G)$ 가 다음과 같다.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) v_2 와 인접한 꼭지점을 구하여라.
- (2) 각 꼭지점의 차수를 구하여라.
- (3) 그래프 G 의 변의 개수를 구하여라.
- (4) 그래프 G 를 그려라.

정리 3.7.2

꼭지점이 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 그래프 G 의 인접행렬을 $A=A(G)$ 라 하자. 그러면 행렬 A^p 의 (i, j) 성분은 꼭지점 v_i 에서 꼭지점 v_j 로 가는 길이가 p 인 길의 개수이다.

【증명】 (길이 p 에 대한 수학적귀납법)

- (i) $p=1$ 일 때는 분명히 위의 정리가 성립한다.
- (ii) $A^{p-1}=(a_{ij}^{(p-1)})$ 라 하고 $a_{ij}^{(p-1)}$ 가 꼭지점 v_i 에서 꼭지점 v_j 로 가는 길이가 $p-1$ 인 길의 개수라고 하자.
- (iii) 이제 $A^p=(a_{ij}^{(p)})$ 라고 하면 $A^p=A^{p-1}A$ 이므로

$$a_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(p-1)} a_{kj}$$

이다. v_i 에서 v_j 로 가는 길이가 p 인 길은 v_i 에서 v_k 로 가는 길이가 $p-1$ 인 길과 v_k 에서 v_j 로 가는 길이가 1인 길을 붙인 것이기에 $a_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(p-1)} a_{kj}$ 는 v_i 에서 v_j 로 가는 길이가 p 인 길의 개수이다.

따라서 수학적귀납법에 의하여 A^p 의 (i, j) 의 성분 $a_{ij}^{(p)}$ 는 v_i 에서 v_j 로 가는 길이가 p 인 길의 개수이다. □

예제 3.7.3 꼭지점이 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 인 그래프 G 의 인접행렬을 A 라고 할 때 A^2 과 A^3 은 다음과 같다고 하자.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 9 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 4 & 9 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 4 & 9 & 4 & 5 \\ 9 & 4 & 4 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- (1) 각 꼭지점의 차수를 구하여라.
- (2) G 의 변의 개수를 구하여라.
- (3) v_2 에서 v_6 로 가는 길이가 2인 길은 몇 개인가?
- (4) v_2 에서 v_6 로 가는 길이가 3인 길은 몇 개인가?
- (5) G 에 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

풀이>> (1) A^2 의 (i, i) 성분은 v_i 에서 v_i 로 가는 길이가 2인 길의 수이므로 곧 v_i 의 차수 $d(v_i)$ 이다. 따라서

$$d(v_1)=4, d(v_2)=3, d(v_3)=3, d(v_4)=4, d(v_5)=3, d(v_6)=3$$

이다.

(2) 모든 꼭지점의 차수의 합은 변의 개수 e 의 2배이므로

$$e = \frac{4+3+3+4+3+3}{2} = 10$$

이다.

(3) v_2 에서 v_6 로 가는 길이가 2인 길의 개수는 정리 3.7.2에 의하여 A^2 의 $(2, 6)$ 성분인 2이다.

(4) v_2 에서 v_6 로 가는 길이가 3인 길의 개수는 정리 3.7.2에 의하여 A^3 의 $(2, 6)$ 성분인 4이다.

(5) 정리 3.7.2에 의하여 A^3 의 (i, i) 의 성분은 v_i 에서 v_i 로 가는 길이가 3인 길의 개수이다. 한편, G 에서 꼭지점 a, b, c 가 삼각형을 이루면 아래 그림에서 알 수 있듯이 이 삼각형은

$$\begin{aligned} a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a, a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow a, b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow b, \\ b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow b, c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c, c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \end{aligned}$$

처럼 길이가 3인 서로 다른 6개의 길로 나타내어진다.

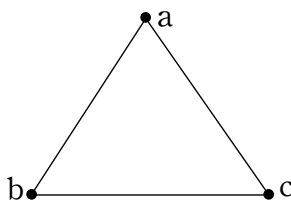


그림 3.7.4

따라서 G 안에 있는 삼각형의 개수는 A^3 의 주대각선의 성분을 모두 합한 수를 6으로 나눈 4이다. □

문제 3.7.3

꼭지점이 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 인 그래프 G 의 인접행렬을 A 라고 할 때 A^2 과 A^3 은 다음과 같다.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 9 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 4 & 9 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & 9 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 4 & 9 & 4 & 5 \\ 9 & 4 & 4 & 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

- (1) 각 꼭지점의 차수를 구하여라.
- (2) 그래프 G 의 변의 개수를 구하여라.
- (3) v_2 에서 v_6 로 가는 길이가 2인 길은 몇 개인가?
- (4) v_2 에서 v_6 로 가는 길이 3인 길은 몇 개인가?
- (5) G 안에 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

1847년 Kirchhoff는 인접행렬을 이용하여 주어진 그래프의 생성수형도의 개수를 알려주는 Matrix-Tree 정리를 발표하였다. 이를 나타내기 위해서는 다음과 같은 행렬의 기본지식이 필요하다.

정의 3.7.3 M 을 $n \times n$ 행렬이라 하자. 각 (i, j) 에 대하여, M 의 i 번째 행과 j 번째 열을 지우고 남은 $(n-1) \times (n-1)$ 부분행렬을 M_{ij} 로 나타내자.

M_{ij} 의 행렬식

$$\det M_{ij}$$

를 (i, j) 에서 M 의 소행렬식이라 하며

$$(-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

를 (i, j) 에서 M 의 여인수라 한다.

예제 3.7.4 다음 행렬 M 의 $(2, 3)$ 에서의 부분행렬과 소행렬식, 그리고 여인수를 구하여라.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

풀이>> $(2, 3)$ 에서 M 의 부분행렬 M_{23} 은 M 의 둘째 행, 셋째 열을 지워서 얻어진

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

이다. 따라서 $(2, 3)$ 에서 M 의 소행렬식 $\det M_{23}$ 은

$$\det M_{23} = (1 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 6 \cdot 4) - (0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot (-2)) = -81$$

이고 여인수는 $(-1)^{2+3} \det M_{23} = 81$ 이다. □

문제 3.7.4

위 예제 행렬 M 의 $(3, 4)$ 에서의 여인수를 구하여라.

정리 3.7.4 (Matrix-Tree 정리)

G 가 꼭지점이 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 그래프일 때 $A(G)$ 를 G 의 인접행렬, 다음과 같이 정의된 $D = (d_{ij})_{n \times n}$ 를 G 의 차수행렬이라 하자.

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i) & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

이때, 그래프 G 의 생성수형도의 개수는 행렬 $D - A(G)$ 의 임의의 여인수와 같다. □

예제 3.7.5 다음 그래프 G 의 인접행렬 A 와 차수행렬 D 를 구하고 이를 이용하여 G 의 서로 다른 생성수형도의 개수를 구하여라.

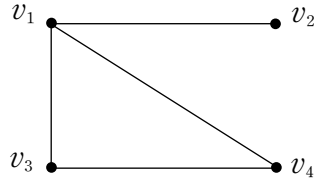


그림 3.7.5

풀이>> 그래프 G 의 인접행렬 A 와 차수행렬 D 는 각각 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서

$$D - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

이고 $(1, 1)$ 에서의 $D - A$ 의 여인수는

$$(-1)^{1+1} \det(D - A)_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

이므로 Matrix-Tree 정리에 따라 그림 3.7.5의 그래프는 오직 세 개의 생성수형도를 갖는다. 사실 G 의 생성수형도는 아래와 같은 세 가지뿐이다.

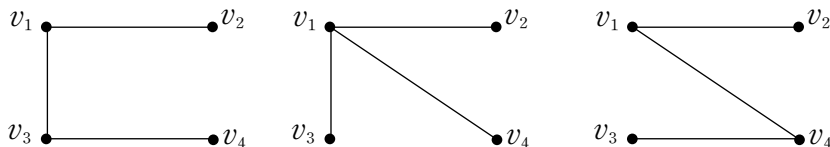


그림 3.7.6

□

문제 3.7.5

다음 그래프 G 의 인접행렬 A 와 차수행렬 D 를 구하여 G 의 서로 다른 생성수형도의 개수를 구하여라.

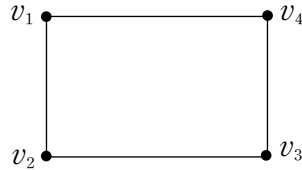


그림 3.7.7

정리 3.7.5

그래프 $G(V, E)$ 에서 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ 라고 하면 그래프 G 의 근접행렬 $B(G) = (b_{ij})_{p \times q}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{꼭지점 } v_i \text{와 변 } e_j \text{가 근접할 때}) \\ 0 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

□

예제 3.7.6 다음 그래프 G 의 근접행렬 $B(G)$ 를 구하여라.

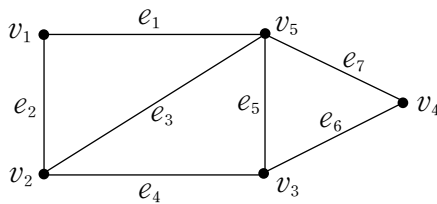


그림 3.7.8

풀이>> $B(G) = (b_{ij})_{5 \times 7}$ 를 G 의 근접행렬이라 하면 꼭지점 v_1 과 변 e_1, e_2 는 근접하므로 $b_{11} = b_{12} = 1$ 이다. 그러나 변 e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 은 꼭지점 v_1 과 근접하지 않으므로 $b_{13} = b_{14} = b_{15} = b_{16} = b_{17} = 0$ 이다. 이런 방법으로 $B(G)$ 의 모든 성분을 구하면

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이다.

□

문제 3.7.6

다음 그래프 G 의 근접행렬 $B(G)$ 를 구하여라.

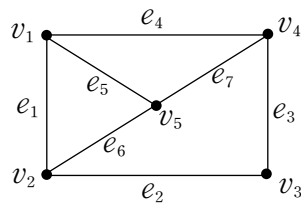


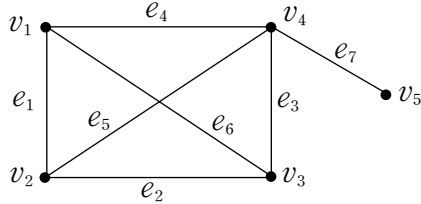
그림 3.7.9

근접행렬의 정의에 따라 단순그래프의 근접행렬 B 는 다음 성질을 갖고 있음을 쉽게 알 수 있다.

- (i) B 는 0과 1로만 이루어진 행렬이다.
- (ii) B 의 임의의 열의 합은 2이다.
- (iii) B 의 어느 두 열도 같지 않다.

>> 연습문제 3.7

1 다음 그래프의 인접행렬 A , 근접행렬 B , 차수행렬 D 를 구하여라.



2 아래의 행렬 $A(G)$ 는 $v_1, \dots, v_5$ 를 꼭지점으로 갖는 그래프 G 의 인접행렬이다.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 각 꼭지점의 차수를 구하여라.

(2) 그래프 G 를 그려라.

3 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 를 꼭지점으로 갖는 그래프 G 의 인접행렬을 A 라고 할 때 A^2, A^3 와 A^4 는 다음과 같다고 하자.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 11 & 20 & 4 \\ 11 & 19 & 18 & 11 & 14 \\ 11 & 18 & 19 & 11 & 14 \\ 20 & 11 & 11 & 20 & 4 \\ 4 & 14 & 14 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

(1) G 의 각 꼭지점의 차수를 구하여라.

(2) 그래프 G 의 변의 수를 구하여라.

(3) v_2 에서 v_5 로 가는 길이가 3인 길은 몇 개인가?

(4) v_2 에서 v_5 로 가는 길이가 4인 길은 몇 개인가?

(5) G 안에 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

4 인접행렬과 근접행렬이 같은 연결그래프 G 를 찾아라.

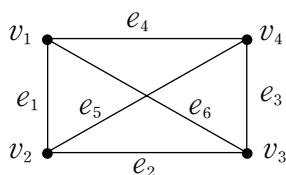
5 그래프 G 가 이분그래프일 때 G 의 꼭지점을 적당히 나열하면 G 의 인접행렬 $A(G)$ 는 다음과 같은 형태가 될 수 있음을 보여라.

$$A(G) = \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{12}^T & O \end{bmatrix}$$

여기서 A_{12} 는 $A(G)$ 의 부분행렬이며 A_{12}^T 는 A_{12} 의 전치행렬이다.

6 아래 그래프 G 에서 다음 물음에 답하여라.

- (1) 인접행렬 A 를 구하여라.
- (2) 차수행렬 D 를 구하여라.
- (3) Matrix-Tree 정리를 이용하여 G 의 서로 다른 생성수형도의 개수를 구하여라.



7 완전그래프 K_n 의 인접행렬과 차수행렬을 구하여라. 또 Matrix-Tree 정리를 이용하여 Cayley 정리를 증명하여라.

8 변의 개수가 양수이고 꼭지점이 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 인 그래프 G 의 인접행렬, 근접행렬, 차수행렬을 각각 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $D=(d_{ij})$ 라고 하자.

- (1) BB^T 의 (i, i) 성분은 꼭지점 v_i 의 차수와 같음을 보여라.
- (2) $i \neq j$ 이고 $\{v_i, v_j\}$ 가 G 의 변이라면 BB^T 의 (i, j) 성분은 1임을 보여라.

- (3) $i \neq j$ 이고 $\{v_i, v_j\}$ 가 G 의 변이 아니라면 BB^T 의 (i, j) 성분은 0임을 보여라.
- (4) 위 (1), (2), (3)을 이용하여 $BB^T = A + D$ 임을 보여라.
- (5) 아래에 있는 행렬 B 는 어떤 그래프 G 의 근접행렬이다. 위 (1)과 (4)를 이용하여 G 의 차수행렬과 인접행렬을 각각 구하여라.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$