제 2 장 정수역학

2.1 서론

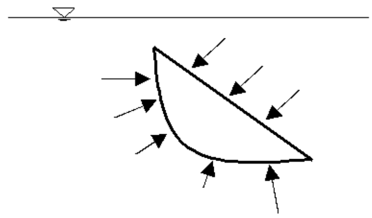
• 정수역학(hydrostatics) : 흐르지 않고 정지상태에 있는 물이 어떤 점 혹은 면에 작용하는 힘의 관계를 다루는 분야

2.2 정수압의 크기와 작용 방향

• 정수압(hydrostatic pressure) : 정수 중의 어떤 면을 가상할 때 정지상태에 있는 물에는 분자간에 상대적인 운동이 없어 면을 따르는 방향의 힘인 전단응력이 발생하지 않으므로 면에 직각방향의 응력만이 작용하게 되며 이와 같은 응력을 압력(pressure)이라 한다. 유체가 물인 경우를 특별히 정수압이라고 한다.

• 정수압의 성질 1 : 정수압은 가상면에 항상 직각방향으로 작용한다.

(1) 평면의 단면적 A에 균일한 압력이 작용할 경우



압력 강도 $p = \dfrac{P}{A} = \dfrac{\text{전압력(힘)}}{\text{단면적}}$

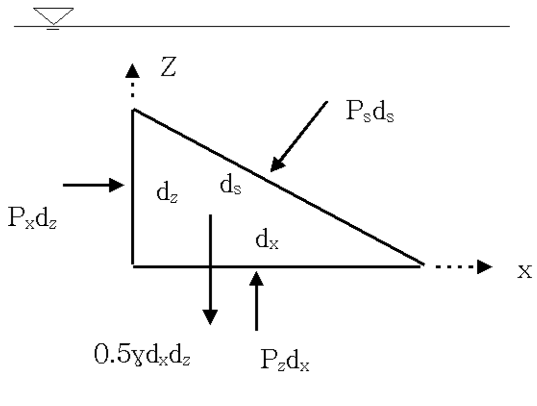
(2) 압력강도가 평면상에 균일하지 않은 경우

미소면적 ΔA에 작용하는 힘을 ΔP라 할 때

(3) 물속 임의 단면의 단위면적당 작용하는 압력강도는 전압력을 면적으로 나누어 계산

⇒ 단위 : 단위 면적당 힘(압력강도), kg/m^2, ton/m^2, lb/m^2

• 정수압의 성질 2 : 정수압은 수중의 한점에서 모든 방향으로 똑같은 크기를 가짐



미소삼각형 수체 (微小三角形 水體)

P_X, P_Z, P_S = 각 면에 작용하는 평균압력

γ = 물의 단위 중량

○ x 방향 정역학적 평형 방정식

$$\Sigma F_x = P_x dz - P_s \cdot ds \cdot \sin\theta = 0$$

그런데 $dz = ds \cdot \sin\theta$

$$\therefore P_x = P_s$$

○ z 방향 정역학적 평형 방정식

$$\Sigma F_z = P_z dx - \frac{1}{2}\gamma dx dz - P_s \cdot ds \cdot \cos\theta = 0$$

그런데 $dx = ds \cdot \cos\theta$

$$\therefore P_z = P_s$$

→ 따라서 $P_x = P_z = P_s$

즉 수중의 한 점에 작용하는 정수압의 크기는 모든 방향으로 꼭 같은 값을 가진다.

2.3 정수압의 연직방향 변화

- 정지하고 있는 유체에서는 수평방향으로 압력의 변화는 전혀 없으므로 동일 수평면상의 임의 두 점에서의 압력은 동일

□ 정역학적 평형 방정식

○ x 방향

$$Pdydz - (P + \frac{\partial P}{\partial x}dx)dydz = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$\therefore$ P = 일정

○ y 방향

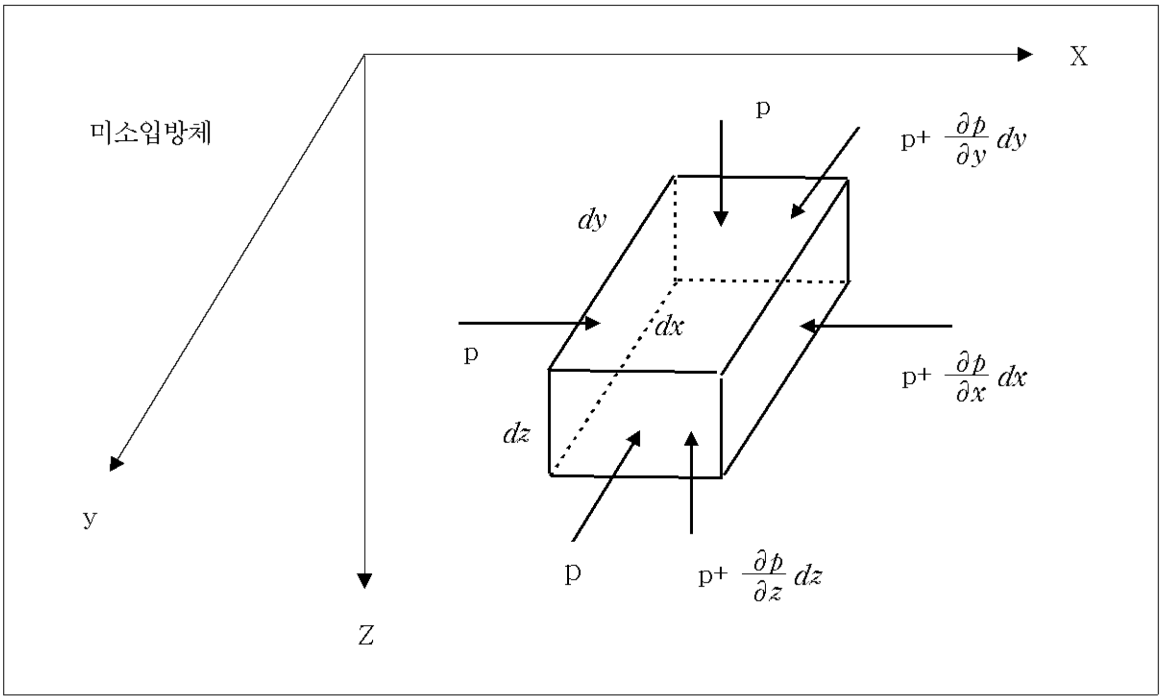
$$Pdxdz - (P + \frac{\partial P}{\partial y}dy)dxdz = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$\therefore$ P = 일정

따라서 x, y 방향 ,즉 수평방향으로의 압력은 항상 일정하다.



- z 방향 (수심방향)의 정역학적 평형방정식은

$$\sum F_z = Pdxdy + \gamma dxdydz - (P + \frac{\partial P}{\partial z}dz)dxdy = 0$$

$$\gamma dxdydz - \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy = 0$$

$\frac{\partial P}{\partial z} = \gamma$ → z방향압력의변화율은유체의단위중량과같음

• 물과 같은 비압축성유체에 대해서는 단위중량 γ를 상수로 간주할 수 있으므로 상기 식 2.10은 다음과 같이 적분 가능하고, 적분상수 C는 수면(z=0)에서 압력이 대기압(p_a)이라는 조건을 이용하여 결정

$p = \gamma z + C, \quad C = p_a$

$p = p_a + \gamma z$

• 수면에서의 압력 즉, 대기압을 기준으로 하여 수면하 임의 깊이에 있어서의 압력은 $p_a=0$ 이므로 다음과 같이 표시되며 수면으로부터 깊이가 z인 점에 작용하는 압력은 물의 단위중량에 깊이 z를 곱하여 계산할 수 있으며, 동일한 유체의 동일 수평면상에 있는 모든 점에 있어서의 압력은 동일

$$\therefore \boxed{p = \gamma z}$$

• 수면으로부터 깊이 z_1과 z_2에 있는 두 점($z_2 > z_1$)의 정수압 차는 두 점간의 높이 차가 h인 경우 다음과 같이 표시

$\Delta p = \gamma z_2 - \gamma z_1 = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma h$

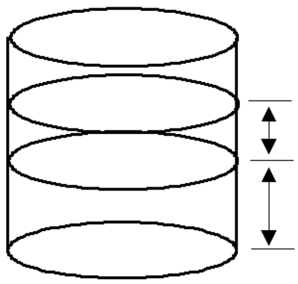
• 상기 식에서 두 점간의 높이 차 h는 다음과 같이 표시되며 이 경우 압력을 수주(물기둥)의 높이 h로 표시한 것으로 이러한 h를 압력수두(pressure head)

$h = \dfrac{\Delta p}{\gamma}$: 압력 수두 (pressure head : 압력차)

예제 1)

① 기름과 물의 접촉면에서의 압력?

② 물통 밑바닥에서의 압력?



(1) $p = \gamma z = (0.8 \times 1000 kg/m^3) \times 1m = 800 kg/m^2$

(2) $p = 800 + 100 \times 2 = 2,800 kg/m^2$

예제 2) 수심 3000m의 해저에서의 정수압? (해수 비중= 1.025)

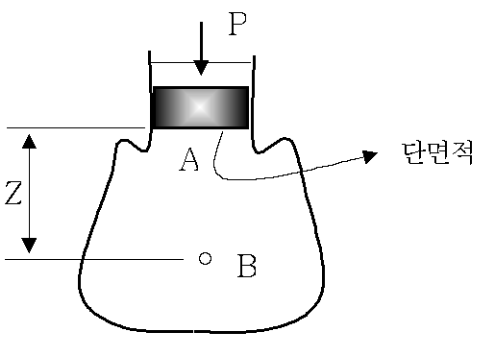
$P = \gamma z = (S\gamma_w z)$

$= 1.025 \times 1000 \times 3000 = 3,075,000 kg/m^2$

$= 3,075 ton/m^2$

2.4 정수압의 전달

가. Pascal의 원리



마개 아래쪽 면 A에 작용하는 압력 강도

-> $P_A = \frac{P}{a}$

B 점에서의 압력 강도

-> $P_B = P_A + \Delta P_A$

힘 P를 ΔP만큼 증가 시키면

-> $P_A = (P + \Delta P)/a$

$= P/a + \Delta P/a$

$P_B = P_A + \Delta P_A + \gamma z$

- 임의의 점 , B 점에서도 압력의 증가는 ΔP_A 즉 $\Delta P/a$이다. 따라서 압력의 증가량은 용기속의 어디에서나 동일하다.
- 용기내의 압력의 증가량은 용기속 어디서나 동일하고, 압력은 용기 전체에 고르게 전달됨을 알 수 있으며 이것이 Pascal의 원리

나. 압력의 전파속도

- 압력의 전파속도 ≈ 1440 m/sec -> 압력은 용기 전체를 통하여 순간적으로 전파된다.
- 이때, 압력의 전파속도 C는 용기가 완전한 강체일 때 액체의 체적탄성계수를 E_b라 하면

아래과 같이 표시되며 표준대기압하에서 수온이 20℃이면 $E_b = 2.11 \times 10^8$ kg/m², ρ=101.86kg·sec²/ m⁴이므로 C ≒ 1,440m/sec이다.

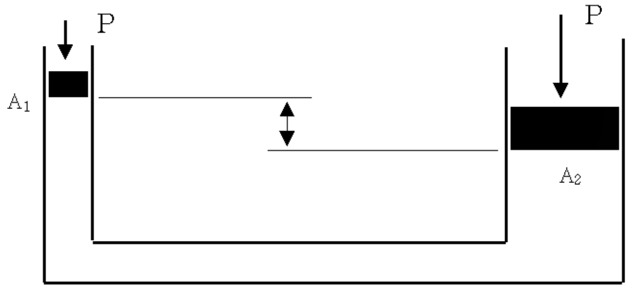
$$C = \sqrt{\frac{E_b}{\rho}}$$

다. 수압기의 원리

$$\frac{P_1}{A_1} + \gamma z = \frac{P_2}{A_2}$$

대개의 경우 P_1, P_2가 충분히 크면 γz항은 무시한다. ->

$$\frac{P_1}{A_1} = \frac{P_2}{A_2} \Rightarrow P_2 = P_1 \frac{A_2}{A_1}$$



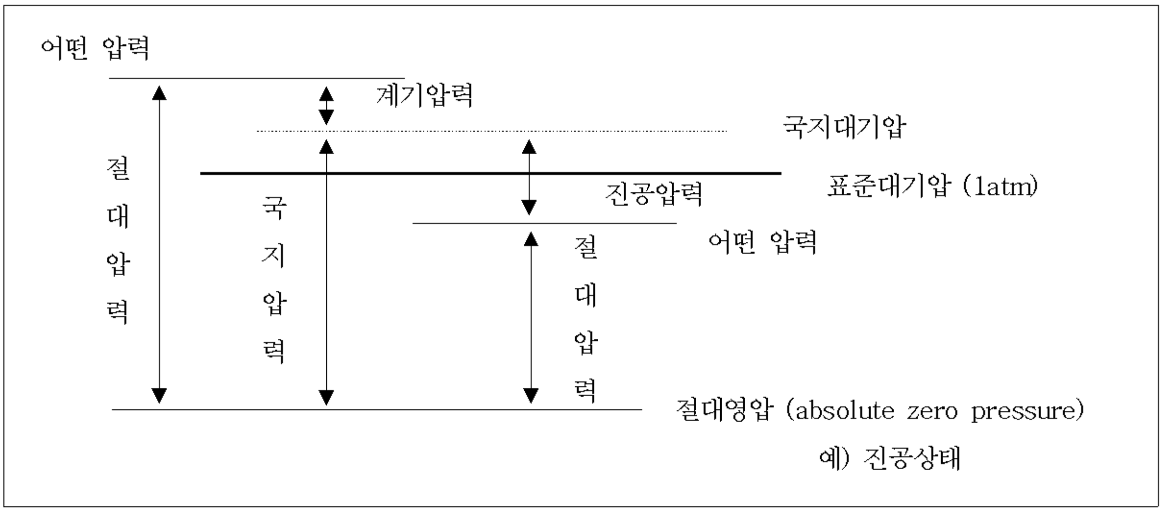
- 상기에서 A_2, A_1의 비를 매우 크게 하면 적은 힘 P_1을 매우 큰 힘 P_2와 평형시킬 수 있으며 이는 작은 힘으로 큰 힘을 얻는 데 사용되는 수압기(hydraulic press)의 원리

2.5 압력의 측정기준과 단위

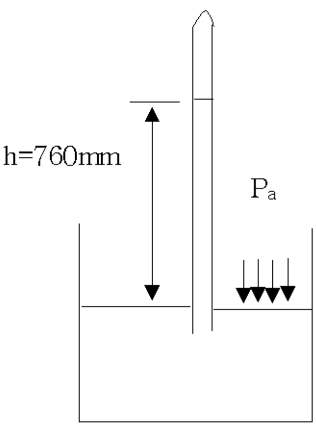
• 압력의 크기는 특정 압력을 기준으로 하여 측정되며 흔히 사용되는 기준압력은 절대영압(absolute zero pressure)과 대기압(atmospheric pressure)이 있음

- 절대압력(absolute pressure) : 완전 진공을 기준으로 하여 압력 측정
- 계기압력(gauge pressure) : 국지대기압을 기준으로 압력 측정

※ 국지대기압이란 어떤 고도나 기준 조건하에서의 대기압을 말하는 것으로서 보통 수은 압력계(mercury barometer)로 측정



• 표준대기압은 평균해면에서 대기가 지구표면을 누르는 평균압력이며, 1기압은 이론상으로 북위 45°, 중력가속도(980.6cm/sec^2)에서 단위면적(1cm^2)을 가진 온도 0℃, 높이 760mm의 수은주(비중 13.595)의 무게로 정의



◦ 1 기압 $= 1\ \text{atm} = 760\text{mm Hg}$

$= 76\ \text{cm} \times 13.59\ \text{g/cm}^3$

$= 1033\ \text{g/cm}^2$

$= 1033 \times 0.98\times10^3\ \text{dyne/cm}^2$

$= 1013\times10^3 \text{dyne/cm}^2$

$= 1013\text{mb} = 1.013\text{bar}$

$= 1.013\times10^5\ \text{N/m}^2$

cf) $1\text{bar} = 1\times10^5 \text{N/m}^2 = 10^5 \dfrac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \left(\dfrac{\text{m}}{10^2\text{cm}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{10^5\text{dyne}}{\text{N}}\right) = 10^6 \text{dyne/cm}^2$

$1\text{kg} = 9.8\text{N} = 9.8\times105\text{dyne}$ $\quad\quad \therefore 1\text{g} = 9.8\times10^2\text{dyne} = 0.98\times10^3\text{dyne}$

• 수은압력계는 수은으로 가득 채워진 유리관을 수은이 담겨 있는 용기속에 거꾸로 세웠을 때 생기는 유리관내의 수은주 높이 h에 의해 대기압을 측정하는 계기이며, 수은주의 평형은 대기압 p에 의해 유지되므로 국지대기압은 다음과 같이 산출

$p = \gamma_m h$ (γ_m: 수은의 단위중량, h : 수은주의 높이)

여기서, γ_m은 수은의 단위중량이며 수은의 비중은 13.6(13.595)

• 국지대기압보다 낮은 계기압력은 부압력 혹은 진공압력이라고 하며 국지대기압보다 높은 계기압력은 양의 계기압력이며 절대압력 p_{abs}는 국지대기압 p_a에 계기압력 p_g를 더한 것으로 표시

$$p_{abs} = p_a + p_g$$

• 대부분의 공학 문제에서는 계기 압력을 사용한다. 따라서, 일반적으로 “압력 = 계기압력”을 뜻한다. 단위 : $[FL^{-2}]$; kg/cm^2, ton/m^2 등

예제 2) 어떤 장소에서의 국지대기압 = 768 mm Hg. 그 곳에서의 계기압력이 5 kg/cm^2 이라면 절대압력은? 또 이 절대압력을 bar 단위로 환산하라. 단, 수은의 비중은 13.6 이다.

(해) 우선 국지대기압을 구하면

$$\circ\ p_a = 76.8\ cm \times 13.6\ g/cm^3$$
$$= 1044.48\ g/cm^2$$
$$= 1.045\ kg/cm^2$$

계기 압력 P_g = 5 kg/cm^2 , 절대 압력 $P_{abs} = P_a + P_g$ = 6.045 kg/cm^2

$$6.045\ kg/cm^2 \times \frac{9.8\ N}{kg} \times \left(\frac{100cm}{m}\right)^2 = 5.924 \times 10^5\ N/m^2$$
$$= 5.924\ bar$$

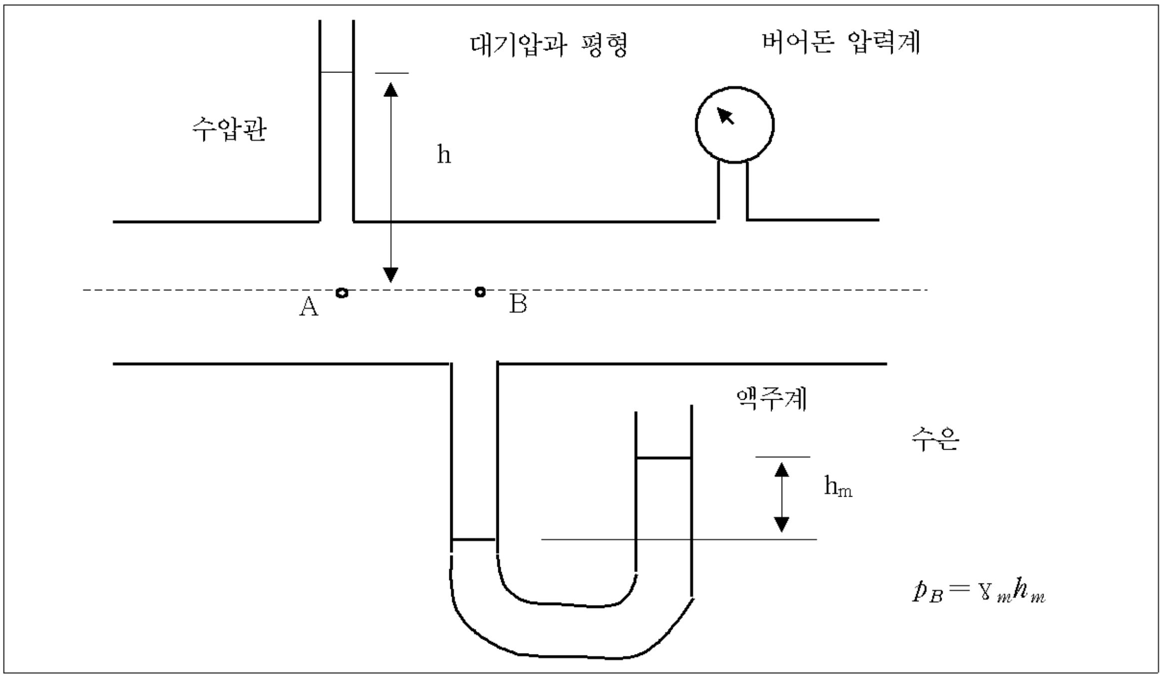
2.6 압력측정 계기

• 정수압 P = γz 는 자유 표면을 가지는 물의 경우이고, 관과 같이 폐합된 수조에 물이 흐를 경우 압력의 측정을 위해서는 별도의 계기가 필요

• 폐합수로의 압력을 측정하는 계기에는 수압관(piezometer), 버어돈 압력계(Bourdon pressure gauge) 및 액주계(manometer) 등으로 세 가지로 분류

1) 수압관(piezometer)

• 관로의 벽을 뚫어 짧은 꼭지(tap)를 달고 여기에 충분히 긴 가느다란 관(tube)을 끼워 연결한 장치를 수압관(piezometer)이라 하며 관로의 수압 때문에 물은 수압관 위로 올라가 대기압과 평형을 형성



• 관의 중립축상의 지점 A에서의 압력 p_A는 수압관의 물의 높이 h에 따라 $p_A = \gamma h$로 계산 가능

• 수압관은 관로의 압력이 비교적 작을 때 효과적이나 압력이 커지면 수압관의 길이도 길어져야 하므로 큰 압력의 측정에는 불편한 단점을 지니며, 관에 설치하는 꼭지의 내경은 약 3.2mm 이내로 하는 것이 좋으며 관로 내벽의 곡면과 일치하도록 제작

2) 버어돈 압력계

• 관로벽에 직접 혹은 수압관의 단부에 연결하여 사용하는 상용 압력계로 속이 빈 구부러진 금속 튜브로 구성되어 있고 튜브의 한쪽 끝은 막혀 있는 반면 다른 쪽 끝은 압력 측정 지점에 연결하며 압력이 커지면 구부러져 있던 튜브는 직선적으로 되고 튜브 끝에 달려 있는 압력표시계는 압력의 크기에 비례하여 움직이도록 구성

• 버어돈 압력계는 큰 압력의 측정에는 많이 사용되나 정밀도가 대체로 낮아서 미소 압력 측정에는 부적당

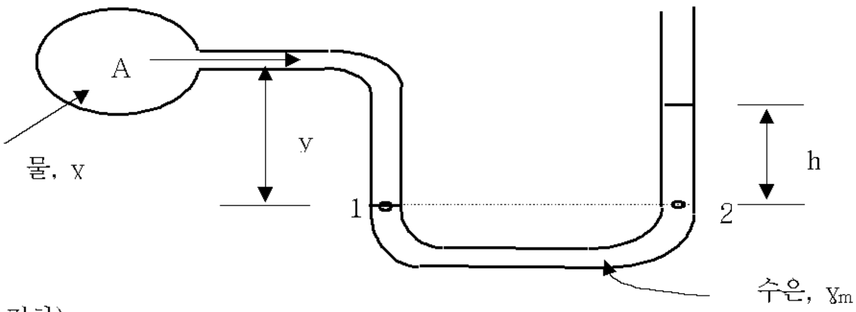
3) 액주계(manometer)

• 액주계 : 비중을 알고 있는 액주계 유체가 들어 있는 U자형의 가느다란 유리관

• 관로나 용기의 한 단면에서의 압력 혹은 두 단면간의 압력차를 측정하는데 사용

• 액주계 유체(manometer fluid)는 측정하고자 하는 유체보다 무거운 유체를 사용하는 것이 보통이며 측정 유체와 섞이지 않아야 하며 흔히 수은을 사용(비중 γ_m=13.6 γ)

- 액주계의 종류에는 개구식과 시차식으로 구분
  - 개구식은 양단 중 한 단이 대기와 접촉시켜 다른 단의 계기압력을 측정하는데 사용
  - 시차식은 양단을 각각 다른 압력을 받고 있는 지점에 연결시켜 양단간의 압력차를 측정하는데 사용
- 개구식(開口式) 액주계의 압력 측정



(계산 절차)

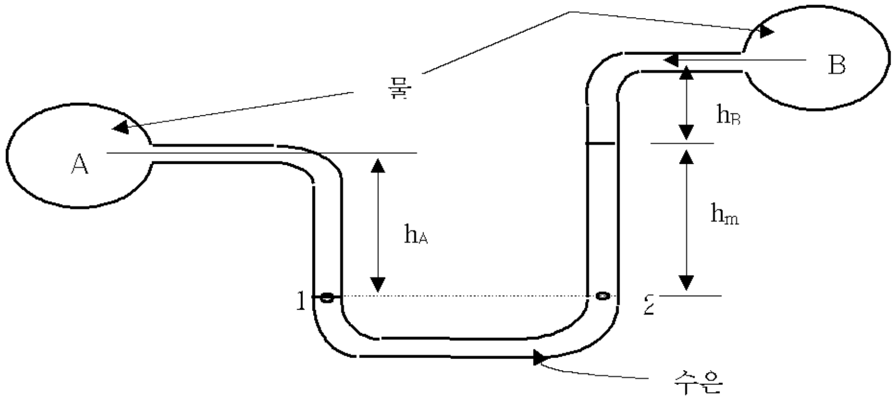
(1) 평형상태에서 액주계 유체의 낮은 표면에 맞추어 수평선을 긋는다. 그러면 점 1, 2는 동일 유체의 수평면상의 점이므로, 지점 1과 지점 2의 압력은 동일($P_1 = P_2$)

(2) 지점 1에서의 압력은 관로인 A점의 압력과 수주 y에 의한 압력을 더한 것으로 계산하고, 지점 2에서의 압력은 수은 표면이 대기와 접하고 있으므로 수은주 h에 의한 압력으로 계산, $P_1 = P_A + \gamma y$, $P_2 = \gamma_m h$

(3) 지점 1과 지점 2의 압력을 같다는 조건에서 A점의 압력을 계산

$P_A + \gamma y = \gamma_m h$ $\therefore P_A = \gamma_m h - \gamma y$

- 시차식(示差式) 액주계의 압력 측정

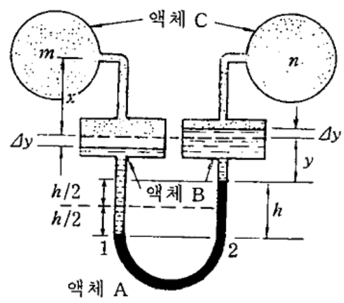


- 지점 2에서의 압력이 B점의 압력과 수주의 압력과 수은주의 압력을 더하여 계산하는 것만 다르고 다른 것은 개구식 액주계의 절차와 동일

◦ $P_1 = P_A + \gamma h_A$, $P_2 = P_B + \gamma_m h_m + \gamma h_B$ $\Rightarrow$ $P_A + \gamma h_A = P_B + \gamma_m h_m + \gamma h_B$

$\therefore$ 두점 A, B 간의 압력차 : $P_A - P_B = \gamma_m h_m + \gamma h_B - \gamma h_A = \gamma_m h_m - \gamma(h_A - h_B)$

• 미차액주계(micro-manometer)는 액주계의 원리에서 압력차가 높이차인 수두인 점을 고려하여 그 높이차를 단면적비로 확대하여 두 지점간의 압력차가 아주 적거나 높은 정도의 압력차를 측정하는데 사용



• 미차액주계는 U자형 관의 중간부분에 두 개의 탱크가 연결되어 있으며 액주계 유체로는 서로 섞이지 않는 두 가지 유체를 사용

• 미차액주계의 압력차 계산은 시차식 액주계와 동일한 방법 적용하며, 3가지 유체의 단위중량과 단면적비를 알고 독치 h만 읽으면 두 지점간의 압력차의 계산이 가능

$$\mathbf{p_m - p_n} = (\gamma_A - \gamma_B)\mathbf{h} + \frac{A_2}{A_1}(\gamma_B - \gamma_C)\mathbf{h}$$
$$= \left[\gamma_A + \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)\gamma_B - \frac{A_2}{A_1}\gamma_C\right]\mathbf{h}$$

예제 3) θ = 30°, ℓ = 10cm, γ_0 = 1,200 kg/m³, P_A=?

풀이) h = $\ell \times \sin\theta$

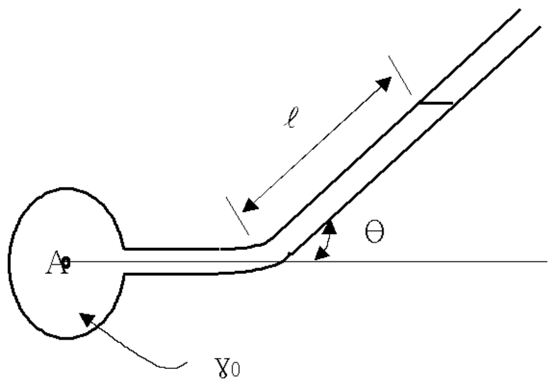
= 10 × sin30° = 5cm

γ_0 = 1,200kg/m³ =1.2g/cm³

∴ $P_A = \gamma_0 h$

= 1.2 × 5

= 6g/cm²



예제 4) P_A=?

풀이)

$P_1 = P_2$, $P_3 = P_4 = P_A$

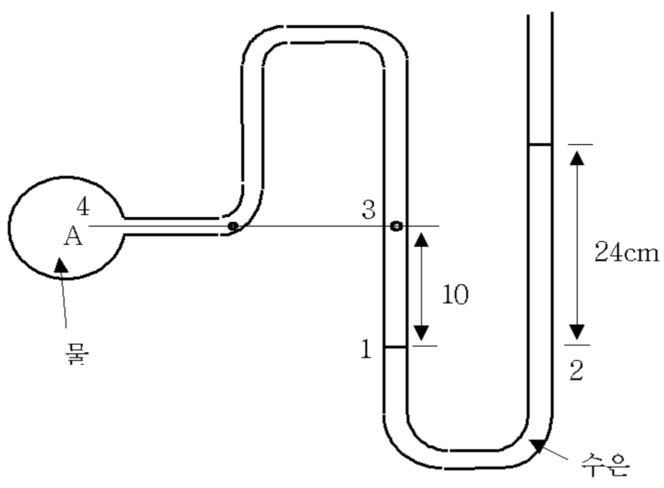
$P_1 = P_3 + \gamma \times 10 = P_A + 10$

$P_2 = \gamma_m \times 24$

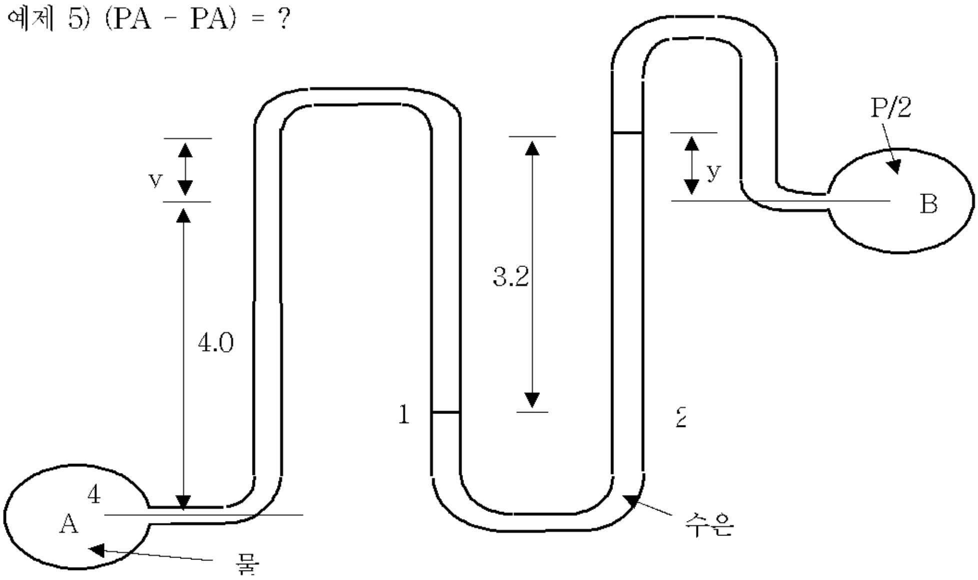
= 13.6 × 24 = 326.4

$P_1 = P_2$ 에서 $P_A + 10 = 326.4$

∴ P_A = 316.4 g/cm²



예제 5) (PA - PA) = ?



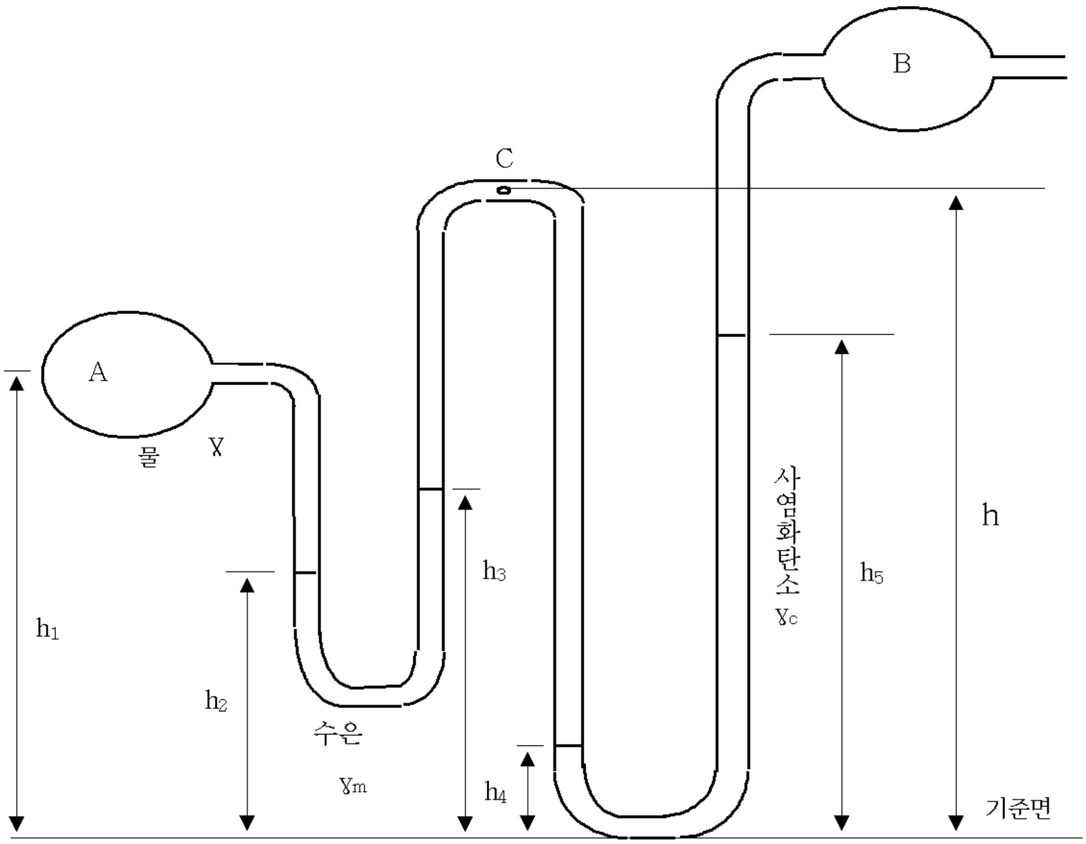
$P_1 = P_2$ 을 이용하면,

$P_1 = 3.2\gamma - (4+y)\gamma + P_A$, $P_2 = 3.2\gamma m - \gamma y + P_B = 3.2 \times 13.6 \times \gamma - \gamma y + PB$ 이므로

$P_A - P_B = 43.52\gamma - \gamma y - 3.2\gamma + 4\gamma + \gamma y = 44.32\gamma = 443.2\ g/cm^2$

예제 6) 복식액주계, P_A = ?

$\gamma_m = 13.6 g/cm^3$, $\gamma_c = 1.6 g/cm^3$, $h_1 = 25cm$, $h_2 = 10$, $h_3 = 15$, $h_4 = 5$, $h_5 = 20$



풀이)

C점에서 연결된 2개의 액주계로 간주

<왼쪽 액주계>

$$P_A + \gamma(h_1 - h_2) = P_C + \gamma(h - h_3) + \gamma_m(h_3 - h_2) \quad \rightarrow ⓐ$$

<오른쪽 액주계>

$$P_C + \gamma(h - h_4) = \gamma_C(h_5 - h_4)$$

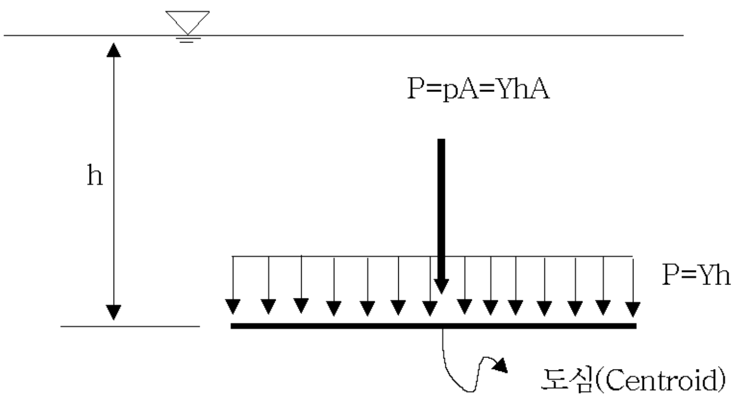
$$\therefore P_C = \gamma_c(h_5 - h_4) - \gamma(h - h_4) \quad \rightarrow ⓑ$$

ⓐ 식을 ⓑ식에 대입하면

$$\begin{aligned} P_A &= P_C - \gamma(h_1 - h_2) + \gamma(h - h_3) + \gamma_m(h_3 - h_2) \\ &= \gamma_c(h_5 - h_4) + \gamma(-h_1 + h_2 - h_3 + h_4) + \gamma_m(h_3 - h_2) \\ &= 1.6(20-5) - 1.0(25 - 10 + 15 - 5) + 13.6(15 - 10) \\ &= 67\ g/cm^2 \end{aligned}$$

2.7 수중의 평면에 작용하는 힘

2.7.1 수면에 평형한 평면의 경우



평면에 작용하는 힘

$P = PA = \gamma hA$

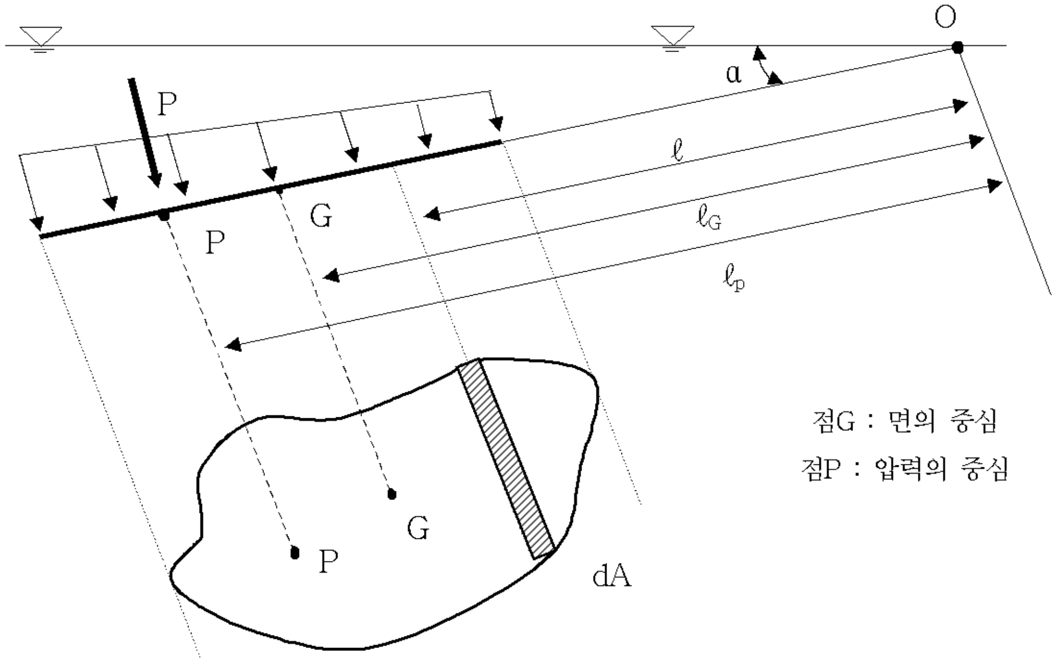
여기서 A는 평면의 총면적

2.7.2 수면에 경사진 평면의 경우

1) 힘의 크기 결정

- 수면에 경사져 있는 수중 평면의 총면적은 A이고 도심(centroid)은 수면으로부터 h_G의 깊이에 있고, 수면과 평면의 연장선이 만나는 교차점 O로부터는 ℓ_G 거리에 있다고 가정하면 미소면적 dA에 작용하는 정수압 dP는 다음과 같이 표시

$$dP = \gamma h dA = \gamma l \sin\alpha dA$$



• 평면의 총단면적 A에 작용하는 힘을 적분하여 구함

$$: \quad P = \int \gamma(\ell \sin\alpha) dA = \gamma \sin\alpha \underbrace{\int \ell dA}_{\text{평면적 A의 o-o 선에 대한 1차 모멘트}} = \gamma \cdot A \cdot \ell_G \cdot \sin\alpha = \gamma \cdot A \cdot h_G$$

• 수중의 평면에 작용하는 힘의 크기는 그 평면적 A에 도심에 작용하는 정수압 강도 γh_G 를 곱하여 구함

$$P = \gamma h_G A$$

2) 힘의 작용점 결정

• 힘의 작용 방향은 해당 평면에 항상 수직(정수압의 원리)

• 힘의 작용선과 O-O선간의 거리 l_P는 O-O선에 대한 미소면적 dA에 작용하는 힘(dP)의 모멘트의 적분치를 총 힘의 크기로 나누어 산출

$$\ell_P = \frac{\int \ell \, dP}{P} = \frac{\int \ell \cdot \gamma \cdot \ell \sin\alpha \, dA}{\gamma \cdot \sin\alpha \int \ell \, dA} = \frac{\gamma \sin\alpha \int \ell^2 dA}{\gamma \sin\alpha \cdot \ell_G \cdot A}$$

$$= \frac{(\int \ell^2 dA)}{\ell_G \cdot A}$$

$$= \frac{I_{o-o}}{\ell_G \cdot A}$$

여기서 $\int_A l^2 dA$는 총면적 A의 O-O선에 대한 단면 2차 모멘트(I_{O-O})

• 단면 2차 모멘트는 다음과 같이 표시

$I_x = \int y^2 dA$, $I_y = \int x^2 dA$

• 「어떤 한 단면의 도심축에 평형한 어떤 한 축에 대한 단면 2차 모멘트는 그 도심축에 대한 단면 2차 모멘트에 면적과 두 축간의 거리를 곱한 값을 합하면 된다」는 평행축정리(transfer formula)에 따라 O-O선에 대한 단면 2차 모멘트를 평면의 도심을 지나면서 O-O선에 평행한 선에 대한 A의 2차 모멘트 I_G와 ℓ_G로 나타내면 다음과 같이 정리

$$I_{O-O} = I_G + \ell_G^2 A$$

• 상기 식을 대입하면 다음과 같이 표시되며, 경사진 평면의 정수압으로 인한 힘의 작용점은 항상 도심보다 아래에 위치

$$\ell_P = \ell_G + \frac{I_G}{\ell_G A} = l_G + \frac{k^2}{l_G}$$

여기서 $k = \sqrt{I_G/A}$로서 단면 2차 회전반경

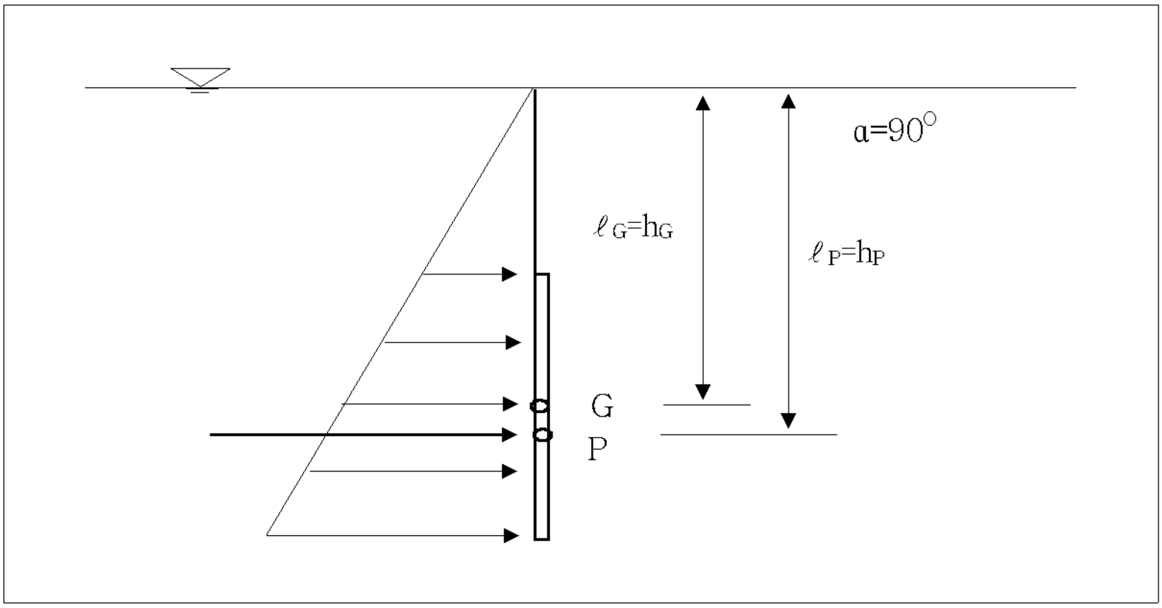
2.7.3 수면에 연직인 평면의 경우

• 수면에 연직인 평면의 경우는 앞서 수면에 경사진 평면의 그림에서 경사각 $\alpha = 90°$인 경우이며 경사 평면의 경우와 비교하면 $l_G = h_G$, $l_P = h_P$인 경우

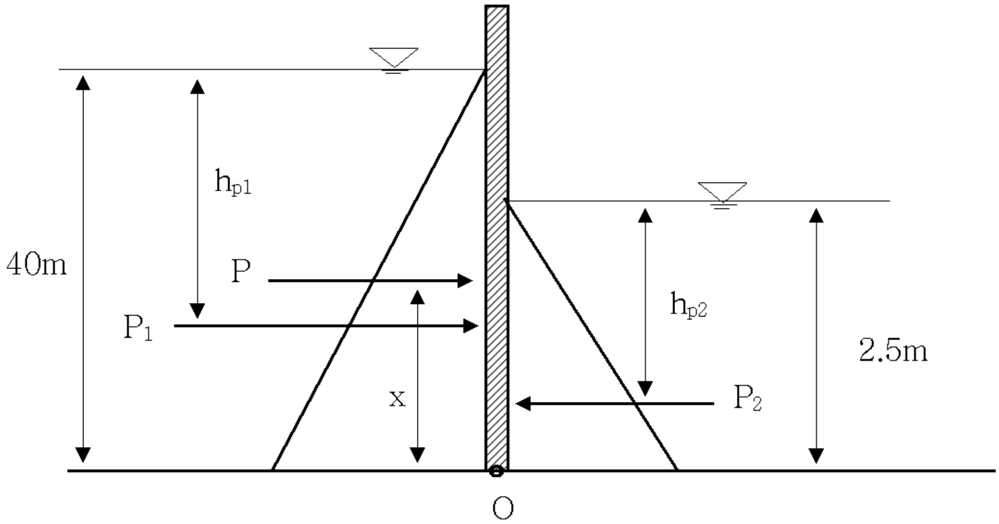
• 따라서, 작용하는 힘의 크기와 작용점은

$$P = \gamma A\, l_G \sin\alpha = \gamma A\, l_G \sin 90 = \gamma h_G A$$

$$h_P = h_G + \frac{I_G}{h_G A}$$



예제 7) 수문의 폭이 3m, 수문에 작용하는 힘과 작용점 ?



왼쪽 : $P_1 = \gamma h_{G1} A_1 = 1 \times 2(4 \times 3) = 24$ ton

$$h_{p1} = 2 + \frac{\frac{3 \times 4^3}{12}}{2 \times (4 \times 3)} = 2.67\text{m}$$

오른쪽 : $P_2 = \gamma h_{G2} A = 1 \times 1.25 \times (3 \times 2.5) = 9.38$ ton

$$h_{p2} = 1.25 + \frac{\frac{3 \times 2.5^3}{12}}{1.25 \times (3 \times 2.5)} = 1.67\text{m}$$

수문에 작용하는 순힘 (net force)

$P = P_1 - P_2 = 24 - 9.38 = 14.62$ ton (→)

O 점에 관한 모멘트의 평형 방정식

$Px = P_1(4 - hP_1) - P_2(2.5 - hP_2)$

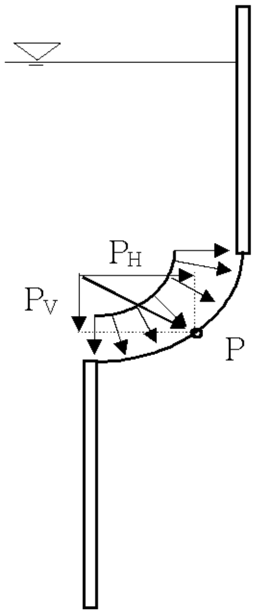
$14.62\ x = 24 \times (4-2.67) - 9.38 \times (2.5-1.67)$

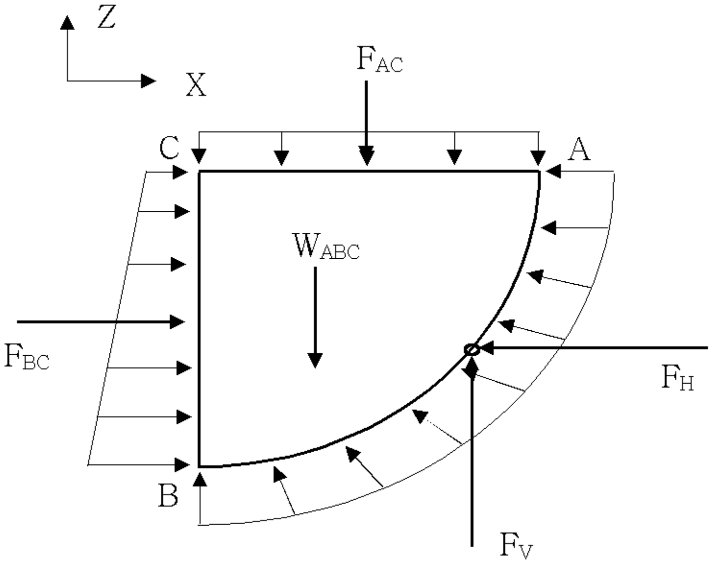
$\therefore x = 1.65$ m

2.8 수중의 곡면에 작용하는 힘

• 수중의 곡면에 작용하는 힘은 전체 정수압을 수평 및 수직분력을 각각 결정한 후 합성을 통하여 계산

• 정수중의 단위 두께의 곡면 AB의 경우 곡면의 각 미소 요소에 작용하는 수압의 크기, 방향 및 작용점은 평면과 동일한 조건으로 결정할 수 있으므로 다음 페이지 그림에 표시된 바와 같은 압력분포를 얻을 수 있으며 이를 다시 수평분력 P_H와 수직분력 P_V를 가진 한 개의 힘 P로 표시 가능





F_H와 F_V는 P_H와 P_V의 반력

• 구조물 중 어떤 요소를 그 구조물로부터 분리하여 그 요소에 작용하는 외력만을 표시한 그림인 자유물체도(free-body diagram, FBD) ABC에 대한 정역학적 평형조건을 적용하면 P_H와 P_V의 반력인 F_H와 F_V를 다음과 같이 구할 수 있으며 Newton의 작용 반작용 법칙에 의하면 작용하는 힘과 반력은 동일 크기

$$\Sigma F_x = F_{BC} - F_H = 0 \qquad \Sigma F_y = F_V - W_{ABC} - F_{AC} = 0$$

$$\therefore \ F_H = F_{BC} = P_H \qquad \therefore \ F_V = W_{ABC} + F_{AC} = P_V$$

여기서 W_{ABC}는 자유물체도 ABC 내의 물의 무게

• 곡면 AB에 작용하는 힘의 결정은 F_{BC}와 F_{AC}의 크기와 작용점을 구하는 문제가 되며 W_{ABC}는 ABC내의 물의 무게로 작용점은 ABC의 중심을 통하여 연직방향으로 작용

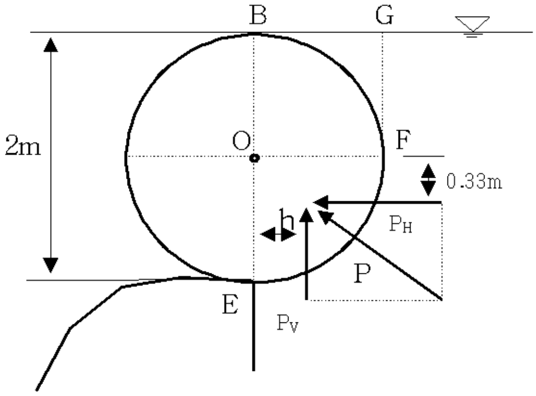
• 수중의 곡선에 작용하는 힘의 수평 및 연직분력의 크기와 작용점을 구하는 절차

① 수중의 곡면에 작용하는 정수압으로 인한 힘의 수평분력은 그 곡면을 연직면상에 투영했을 때 생기는 투영면적의 정수압으로 인한 힘의 크기와 같고 작용점은 연직면에 작용하는 힘의 작용점과 동일

② 수중의 곡면에 작용하는 힘의 연직분력은 그 곡면이 밑면이 되는 물기둥의 무게와 같고 그 작용점은 수주의 중심을 통과

• 연직분력을 계산할 때 곡면의 상부가 물로 채워져 있지 않고 다른 것으로 채워진 경우라도 곡면의 하단부는 그 곡면을 밑면으로 하는 수면까지의 체적에 해당하는 물의 무게와 같은 상향력(부력)을 받게 되고 그 작용점은 체적의 중심이라는 점에 주의를 요하며 곡면 상단부는 별도로 고려

예제 8) 직경 2m, 수문에 작용하는 정수압으로 인한 힘의 크기와 작용점



수평분력 $P_H = \gamma h_G A = 1 \times 1 \times (2 \times 1) = 2$ ton

작용점

$$h_H = h_G + \frac{I_G}{h_G A} = 1 + \frac{\frac{1*2^3}{12}}{1 \times 2} = 1.33\text{m}$$

연직분력

Pv = 수문의 아랫곡면 FE에 작용하는 상향력 과 윗곡면 FB에 작용하는 하향력의 차

= ɣ(면적BEFG - 면적BFG) × 1

= ɣ(반원 BEFB의 면적) × 1

= 1 × (0.5×(π/4)×2²) = 1.57 ton

합력 P는 원의 중심 O를 통과하므로

$\Sigma Mo = Pvhv = PH(hH - \overline{BO}) = 0$, $1.57\ hv = 2(1.33-1)$

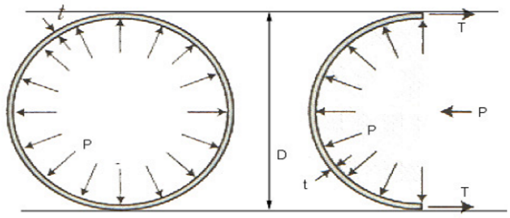
∴ hv = 0.42 m ⇒ $\bar{y} = \frac{4\gamma}{3\pi}$ = 0.42

따라서 합력 P = $\sqrt{2^2 + 1.57^2} = 2.54$ ton

2.9 원관의 벽에 작용하는 동수압

• 동수압으로 인해 관의 벽이 받는 힘은 곡면에 작용하는 정수압의 수평분력을 계산하는 원리를 적용하면 계산이 가능. 이때, 관의 재료의 인장력이 저항하는 힘으로 작용

• 관의 내경 D, 길이 l, 동수압 강도 p, 동수압이 관의 반단면에 미치는 힘을 P, 관의 인장력을 T라 하고 반원관에 대해 고려하면 $2T = P$



• 관의 절반 단면에 미치는 힘 P와 관의 인장응력을 σ, 관의 두께를 t라 하면 인장력 T는 다음과 같이 표시

$P = pDl$, $T = \sigma t l$

• 따라서 $\sigma t = \frac{pD}{2}$ 의 관계가 성립

• 관의 설계에 있어서는 σ 대신에 관의 재료의 허용응력 σ_{ta}를 사용하며 이를 이용하여 관의 두께를 구하는 다음과 같은 공식이 주장력공식(hoop tension formula)이며 관의 직경과 동수압이 결정되면 관의 두께의 결정이 가능

$$t = \frac{pD}{2\sigma_{ta}}$$

2.10 부력과 부체의 안정

• 액체속에 잠겨 있는 물체의 무게는 공기중에서의 무게에 비해 그의 체적에 해당하는 액체의 무게만큼 가벼워진다는 것이 아르키메데스의 원리(Archimedes' Principle)

• 아르키메데스의 원리는 수중에 잠겨 있거나 떠 있는 물체가 부력을 받게 됨을 의미

2.10.1 부력(Buoyancy Force)

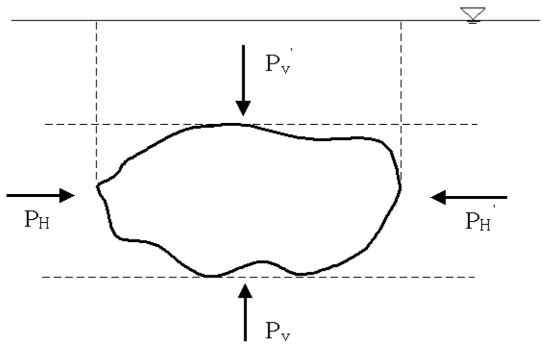
• 수중물체의 정적평형방정식

– 수평방향 : $P_H = P_H'$

– 연직방향 :

물체에 작용하는 순(net)연직력

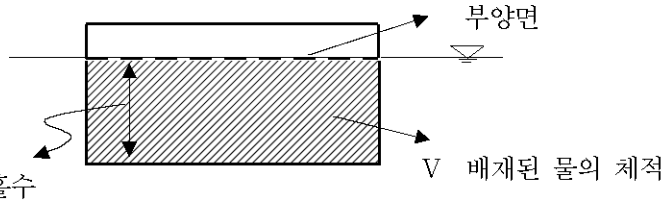
$F_B = P_V - P_V' = \gamma \times$(물체의 체적) $= \gamma \cdot V$



• 상기 식에서 단면에 작용하는 연직 외력은 단면적의 체적과 같은 물의 무게와 같으며 이는 수중단면의 무게는 단면적의 체적에 해당하는 물의 무게만큼 가벼워짐을 의미

• 부력(buoyancy force)

$$F_B = \gamma \cdot V$$



• 수중에 잠겨 있는 경우 물체의 무게 $W_s = W - F_B = \gamma_s V - \gamma V = (\gamma_s - \gamma)V$

여기서 W_s는 수중 무게, W는 공기중 무게, γ_s는 물체비중, γ는 물 비중, V는 물체 부피

• 물의 표면에 떠 있는 경우 물체의 무게 $F_B = \gamma \times$(물에 잠긴부분의 체적) $= W$

• 부심(center of buoyancy) : 부력의 작용점은 물체가 배제한 물의 체적중심. 물체가 물의 표면에 떠 있거나 수중에 잠겨 있을 때 물체중심과 부심은 동일 연직선상에 있고 무게와 부력은 크기는 같으나 작용방향은 서로 반대

• 물 표면에 떠 있는 부체가 수면에 의해 절단되는 면을 부양면(plane of floatation)이라 하며 부양면으로부터 물체의 최하단까지의 깊이를 흘수(draft)

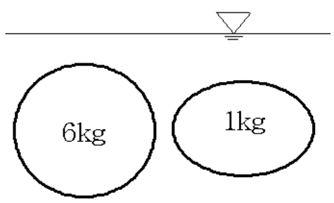
예제 9) 이 물체의 체적과 비중?

부력 F_B = 6-1 = 5kg, γV = 5kg

$1000 kg/m^3 \times V = 5kg$

$\therefore V = 5/1000\ m^3 = 0.005\ m^3$

$S = W / \gamma V = 6/(1000 \times 0.005) = 1.2$



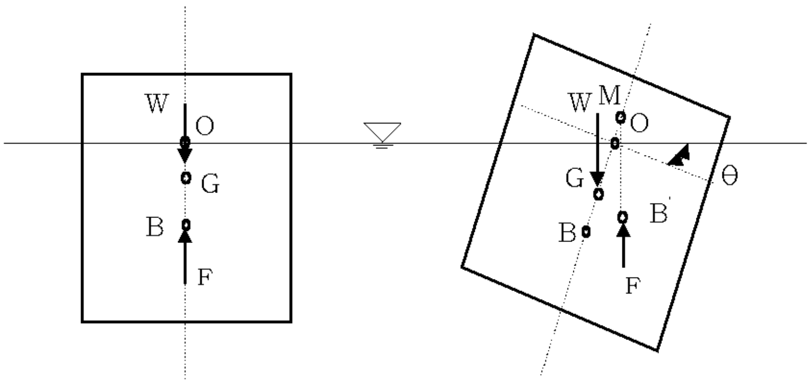
2.10.2 부체의 안정조건

• 부체의 안정은 표면에 떠 있는 물체의 중심(G)과 부심(B)의 상대적인 위치에 따라 결정

• 중심과 부심이 동일 연직선상에 위치하면 물체는 평형상태에 있게 되어 안정을 유지하나 바람이나 파도 등으로 인해 수면과 θ의 각도로 기울어지면 중심의 위치는 변동이 없으나 부심의 위치는 수중에 잠긴 부분의 면적중심으로 이동

• 부체가 기울어진 경우에는 중심에 작용하는 물체의 무게(W)와 새로운 부심에 작용하는 부력(F_B)은 크기는 같고 우력(couple moment) $W \cdot x$가 발생하게 되고 이것이 오른쪽으로 기울어진 상태에서 부심이 중심보다 오른쪽에 위치하면 부체를 복원시키는 힘으로 작용할 경우 복원모멘트가 되고 외부 요인으로 반대일 경우에는 전도모멘트

• 이동된 부심에서 연직선을 그어 평형상태에서의 중심과 부심을 연결하는 선과 만나는 점을 경심(metacenter)이라 하고 경심과 무게 중심과 거리 $\overline{GM}$를 경심고(metacentric height)라하며 이는 부체 안정여부의 척도로 사용



G : 중심

B : 부심

M : 경심

$\overline{GM}$: 경심고

$\overline{GM}<0$이면 불안정(전도)

$\overline{GM}>0$이면 안정 (즉, M이 G보다 위에 있으면 안정)

$\overline{GM}=\overline{MB}\mp\overline{GM}$ (G가 B보다 위에 있으면 ‘ - ’)

$\overline{MB}=\frac{I_o}{V}$ I_o: 부양면의 o-o 축에 대한 단면 2차 모멘트

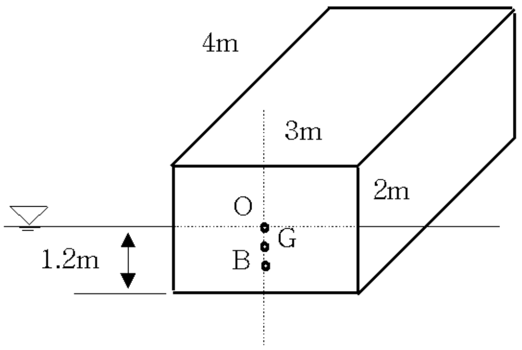
V: 배제된 물의 체적

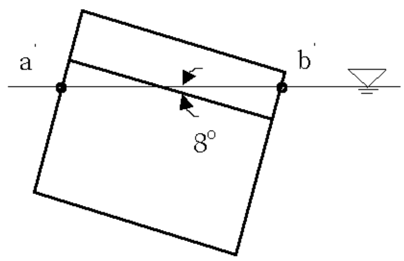
• $\overline{GM}>0$이면(M이 G보다 위) 복원모멘트가 작용하여 부체는 안정상태를 되찾게 되나, $\overline{GM}<0$이면(M이 G보다 아래) 전도모멘트가 작용하여 불안정한 상태가 계속되면서 전도되며, $\overline{GM}>0$으로 되는 즉, 안정상태로 회복되는 복원모멘트 크기는 다음과 같이 산출

$M_R=w\cdot\overline{GM}\cdot\sin\theta$ (복원 모멘트)

예제 2.18)

a) 경심고를 구하여 부체의 안전여부를 파악하라.





$$\overline{GB} = 1.2 - 0.2 - 0.6 = 0.4m$$

$$\overline{MB} = \frac{I_o}{V} = \frac{\frac{4\times3^3}{12}}{4\times3\times1.2} = 0.625m$$

경심고

$$\overline{GM} = \overline{MB} - \overline{GB} = 0.625 - 0.4 = 0.225m \quad > \quad 0$$

∵ G가 B보다 높으므로 ∴ 안정

b) Θ = 8°로 기울어진 상태에서의 경심고와 복원 모멘트?

$\overline{GB}$ = 0.4m는 불변

$$\overline{a'b'} = \frac{3}{\cos 8°} = 3.03m$$

$$\overline{MB} = \frac{I_o}{V} = \frac{\frac{4\times3.03^3}{12}}{4\times3\times1.2} = 0.644$$

경심고

$$\overline{GM} = \overline{MB} - \overline{GB} = 0.644 - 0.4 = 0.244m \quad > \quad 0$$ ∴ 안정

복원모멘트

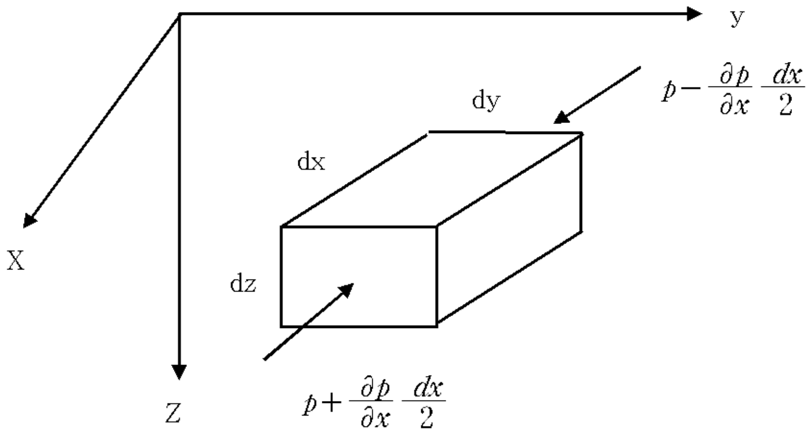
$$M_R = W\times\overline{GM}\times\sin\Theta = (1000\times4\times3\times1.2)\times0.244\times\sin 8° = 489kg\cdot m$$

2.11 상대적 평형

• 물이 담겨진 용기가 일정한 등가속도를 받으면 물은 용기와 함께 등가속도 운동을 하게 되므로 물 분자 상호간에는 상대적인 운동이 없어 마찰응력이 작용하지 않아 물에 작용하는 힘은 압력뿐이며 물은 용기에 대하여 상대적으로 정지평형을 이루게 되므로 정수역학의 원리를 그대로 적용 가능

2.11.1 정수의 평형방정식

• 정수중의 임의 미소육면체 dxdydz의 단위질량당 작용하는 모든 외력(F=mα에서 단위질량에 대한 것이므로 가속도)의 x, y, z 방향 성분을 각각 X, Y, Z라 하고 육면체 중심에서의 정수압을 p라 할 때 정역학적 평형에서 다음과 같은 관계를 도출



• x-방향 평형 방정식 : x 방형으로 압력이 변한다는 가정하에서 식을 전개

$$\rho(dxdydz)\cdot X+(P-\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydz-(P+\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2})dydx=0$$

$$\rightarrow \rho(dxdydz)X-\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz=0$$

$$\therefore\ \frac{\partial P}{\partial x}=\rho X$$

• 마찬 가지의 방법으로

$$\therefore\ \frac{\partial P}{\partial y}=\rho Y \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\rho Z$$

위의 세 식의 양변에 dx, dy, dz를 각각 곱한 후 더하면

$$dP=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\frac{\partial P}{\partial z}dz=\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

• 압력이 일정한 점을 연결한 등압면상에서는 p가 일정하여 dp=0이 되므로 등압면 방정식은 다음과 같이 표시되고 이 식을 사용하면 등압면 중에서도 계기압력이 0이 되는 특수한 경우인 수면방정식의 산출이 가능

$$\therefore\ \rho(Xdx+Ydy+Zdz)=0, \qquad \therefore\ Xdx+Ydy+Zdz=0$$

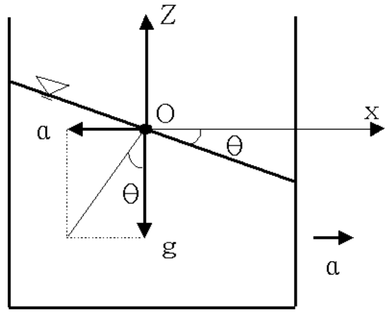
2.11.2 수평 등가속도를 받는 수체

• 물이 들어있는 상부가 개방된 용기에 일정한 가속도 α를 수평방향(x 방향)으로 이동시킨다고 가정하면 용기가 +x 방향으로 α의 가속도를 받으므로 물은 – α의 가속도를 받게 되어 평형상태에 도달하면 수면이 기울어짐

- 평형상태에 도달한 때 단위질량의 물이 받는 외력의 x, y, z 방향의 성분

  $X = ma = (1)(-a) = -a$

  $Y = 0 \quad Z = (1)(-g) = -g$



- $Xdx + Ydy + Zdz = 0$에 입력하면

  $-adx - gdz = 0$

  적분하면 $-ax - gz + C = 0$

  경계조건 : 원점 O에서의 경계조건 (x=0일 때 z=0) -> C=0

  $\therefore -ax - gz = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore z = -\frac{a}{g}X$ (평형 수면의 방정식)

- 상기 평형수면의 방정식은 원점 O를 지나는 직선임을 알 수 있고 수평과 이루는 각 θ는 다음과 같이 표시 $\tan\theta = \frac{dz}{dx} = \frac{a}{g}$

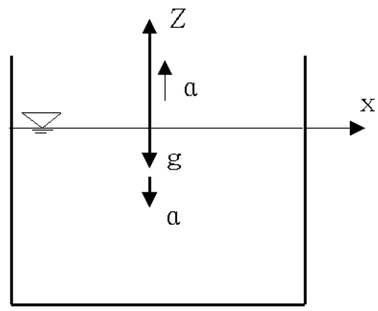
- 수면으로부터 z=-h인 점에서의 정수압은 p= γh

2.11.3 연직 등가속도를 받는 수체

- 물이 든 용기를 연직상향으로 a의 등가속도로 이동시키면 물은 이동방향과 반대되는 방향으로 등가속도를 받음

- X=0 , Y=0 , $Z = -(a+g)$를 $Xdx + Ydy + Zdz = 0$에 대입하면 $-(a+g)dz = 0$

  -> z = const. : 수면은 수평을 유지함을 의미



- 수면 아래 연직 방향의 정수압 변화

  $\frac{dP}{dz} = +\rho Z = -\rho(a+g) = -\rho g(\frac{a+g}{g}) = -\gamma(\frac{a}{g}+1)$

  : $P = -\gamma z(\frac{a}{g}+1) + C$ (B.C: $P = 0$ at $z = 0$ $\therefore C = 0$)

  따라서, 수면으로부터 z=-h 인 점에서의 정수압은 $P = \gamma h(1+\frac{a}{g}) = \gamma h + \gamma h(\frac{a}{g})$

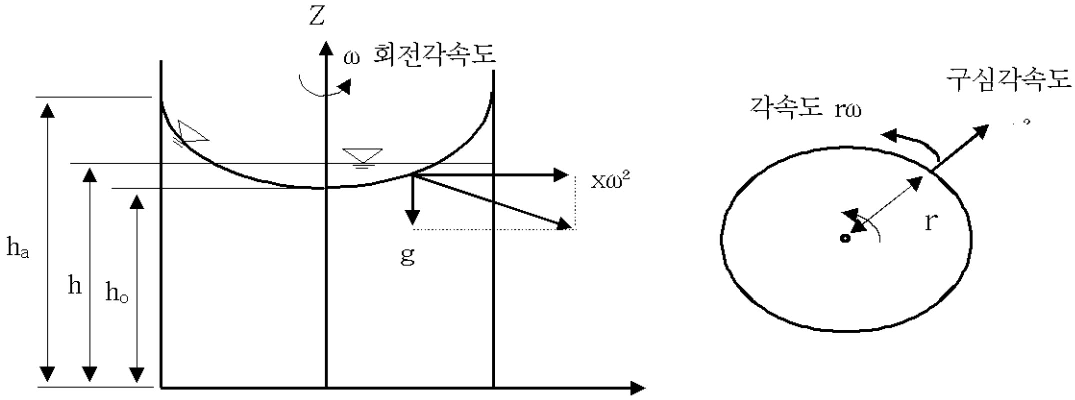
- 연직상향의 등가속도를 a를 받을 경우는 중력가속도만 받을 경우보다 정수압이 (a/g)배 만큼 더 커짐

- 만약 하향으로 용기가 등가속도 a를 받으면 $P = \gamma h(1-\frac{a}{g}) = \gamma h - \gamma h(\frac{a}{g})$

이때, 무압력 상태 P = 0 이 되려면 a=g 일 때 이다.

2.11.4 회전 등가속도를 받는 수체

- 반경이 r인 원통에 초기수심 h로 물을 담고 원통을 일정한 각속도 ω로 원통축 둘레로 회전시킨다고 가정하면 원통내 물도 각속도 ω로 회전하게 될 것이며 결국 상대적 평형에 도달하여 아래 그림에서와 같은 수면곡선을 형성
- 이 때 단위질량의 물이 받는 x, y, z 방향의 외력은 x 방향의 경우 회전축 z로부터 거리 x에서는 곡면에 접선인 방향으로의 회전 각속도 ω에 의한 구심가속도 $x\omega^2$으로 인한 원심력과 중력가속도 g에 의한 물의 무게이므로 $X = x\omega^2$, $Y = 0$, $Z = -g$



- 상기 내용을 $Xdx + Ydy + Zdz = 0$에 대입하면 $x\omega^2 dx - g dz = 0$
- 상기 식을 적분하면 $\frac{\omega^2}{2}x^2 - gz + C = 0$
- 좌표축에서 x = 0일 때 z = h_0이므로 C = gh_0이므로 등회전가속도를 받는 수위의 수면곡선

식은 $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + h_0$ ∴ 수면 곡선식(회전포물면)

- 수면 아래 연직방향의 정수압의 변화는 $\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$
  $\therefore\ p = -\gamma z$
- 수면으로부터 z = -h인 점에서의 정수압은 $p = \gamma h$
- 회전포물면은 원통의 체적을 이등분하므로 $\frac{1}{2}\pi r^2(h_a - h_0) = \pi r^2(h - h_0)$
  $\therefore\ h_0 = 2h - h_a$
- x = r(원통의 벽)에서 z = h_a이므로 $h_a = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + h_0$
- h_a에 관하여 풀면 $h_a = \frac{1}{2}(2h + \frac{\omega^2}{2g}r^2)$
- h_0에 관하여 풀면 $h_0 = \frac{1}{2}(2h - \frac{\omega^2}{2g}r^2)$
- 결국, h_0 및 h_a는 정수심 h와 원통의 반경 r 및 회전각속도 ω만의 함수로 표시